



UZH - Weiterbildung für Lehrpersonen an Maturitätsschulen

Elemente der Quantenphysik an Maturitätsschulen

Unterrichtsvorschläge und ein Seitenblick auf die Klimaphysik

Modul 2: «Wo ist das Elektron?» ***Auf dem Weg zur Quantenmechanik***



Hans Peter Dreyer



Was stellen sich die Lernenden vor?



Die Vorstellungen sind von einem klassischen Teilchenbild des Elektrons als einem massiven (**Punkt-**)Teilchen geprägt (Schorn, 2014).

Das 'Bohrsche' Atommodell ist die eindeutig dominierende Schülervorstellung (Müller & Schecker, 2018).

1 unstrukturiert	2 Planeten-Atom	3 Orbital mit Grenze	4 Orbital - wolkig	5 abstraktes Objekt

Students have difficulty letting go of Bohr's planetary model (Krijtenburg-Lewerissa et al., 2017).

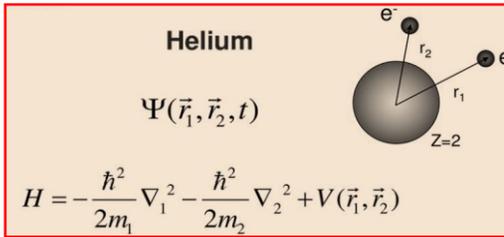
Zentrale Herausforderung: *Punkt-Teilchen* durch *nicht-lokale Vorstellung (Quantenobjekt)* ablösen!

We argue that the **messiness** of student reasoning should be **valued**. (Hoehn & Finkelstein, UC Boulder, 2018)

«Messiness» beim Entstehen von Wissenschaft: Schrödinger an Sommerfeld resp. Planck, am 20. resp. 26. Februar 1926:

« ψ -Schwingungen **sind nicht** elektromagnetische Schwingungen im alten Sinn.»

«Ich meine selbstverständlich **nicht**, dass etwa jene ψ -Schwingungen gewöhnliche Massenschwingungen **sind**.»



Quantenmechanik? => Blick in Geschichte

↔ *Was weglassen?*

1897 J. J. Thomson

entdeckt Elektron

...

...

2019 SI-System

h definierende Konstante ↔ materielles Urkilogramm überflüssig

In den FACETTEN sind unter anderem weggelassen:

1914 Franck & Hertz

Elektronenstoss-Experiment

1915 Duane & Hunt

Energie-Frequenz-Grenze bei Röntgenstrahlung

1925 Heisenberg, Dirac

Matrizenmechanik, Operatoren

usw. usw.

In Modul 3 verschieben

1925 Goudsmith & Uhlenbeck: Spin

1926 Schrödinger: Gleichung

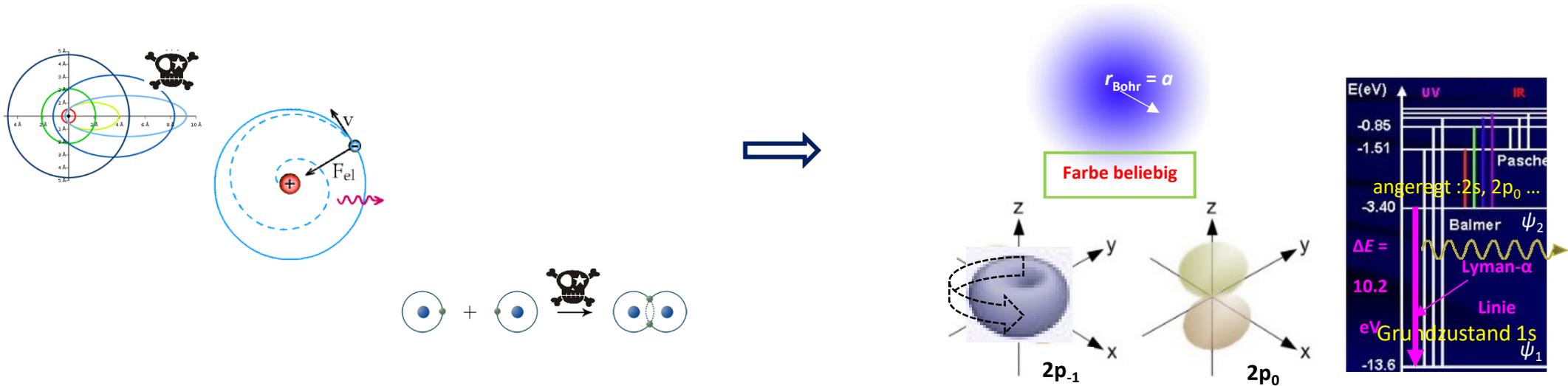
1927 Heisenberg: Unbestimmtheitsrelation

1927 Heitler & London: Elektronenpaarbindung

1927 Fermi & Dirac: Quantenstatistik

1935 Einstein-Podolsky-Rosen: Ist die Quantenmechanik vollständig?

Lernziel Physik: *Angestrebter Konzeptwechsel bei Atom und Elektron*



Nicht mehr: **teilchenartiges Planetenbild**, sondern neu **Orbitalbild** mit **diskreten Energieniveaus**

Auch das Elektron ist ein **Quantenobjekt**. Es **zeigt Welle-Teilchen-Dualität**, gebunden oder frei (oder tunnelnd).

2 Sprechweisen

«Das Atom ist kein Mini-Sonnensystem, sondern ein flauschiger Ball.»

«Das Elektron ist kein Kügelchen, sondern ein Quantenobjekt.»

2 math. Beziehungen

$$\lambda_{dB} = h/p$$

$$w = \psi^2$$

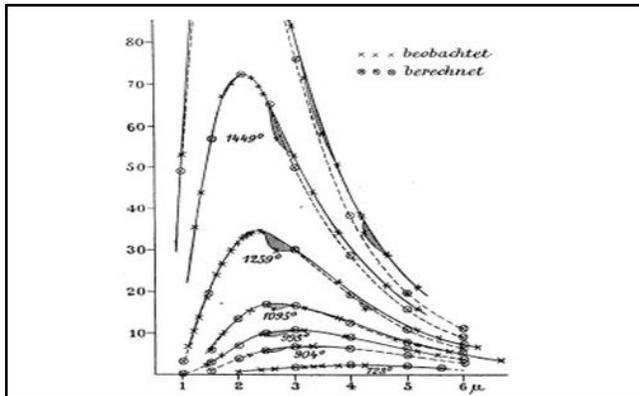
Lernziel NoS: *Angestrebte Konzeptentwicklung*

«Experiment vor Theorie»



Wechselwirkung zwischen Theorie und Experiment

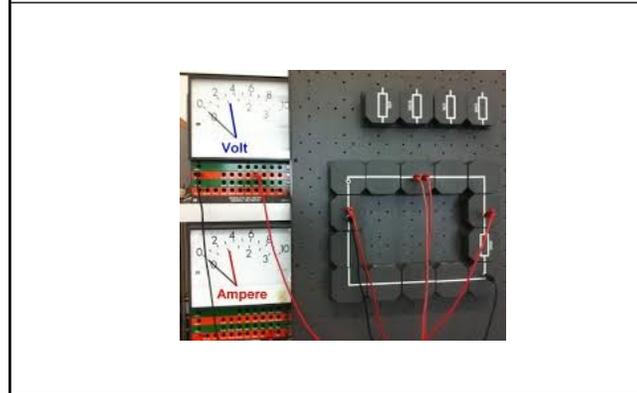
Lummer & Pringsheim vor Planck



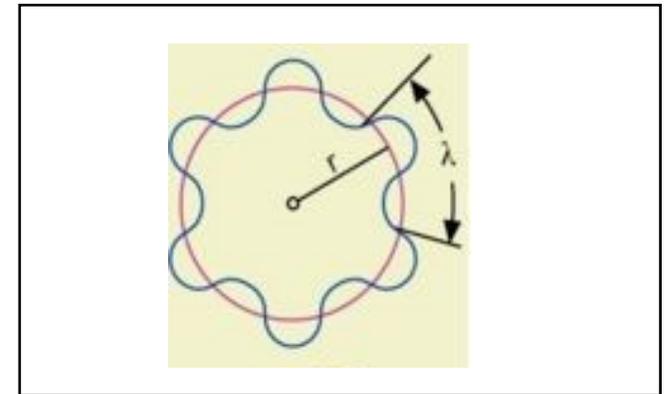
erteilung im durchstrahlten M
Ausdruck:

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k\theta}} - 1},$$

Ohm: Theorie & Experiment



Davisson vor de Broglie vor Davisson



LERNWEG

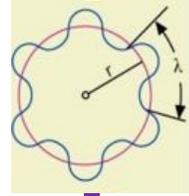
Konzeptwechsel: ~~Punkt-Teilchen~~ durch **nicht-lokales Quantenobjekt** ablösen.



Wo ist das Elektron?



teilchenartig

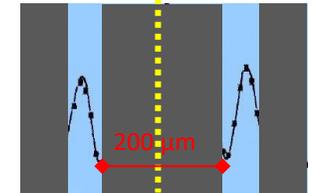


auch wellenartig



«Feldskalar»
ψ

Hückl ETH, 1926:
Gar manches rechnet Erwin schon mit seiner Wellenfunktion



de Broglie, 1923: *unifier les points de vue corpusculaire et ondulatoire* → Materiewelle, nicht lokal

Die Lernenden verstehen die Dualität in $\lambda_{dB} = h/p$. Bestätigung des Wellenaspekts mit freien und gebundenen Quantenobjekten.

Le sens véritable des quanta ...

... erfasst erst **Schrödinger 1926** mit dem «Feldskalar» ψ .

«Atome sind flauschig.»

«Das Elektron **ist nicht** an einem Ort $x(t)$ »

Das ist intuitiv und einleuchtend, aber präzisierungsbedürftig.

... ist nur eine halbe Antwort.

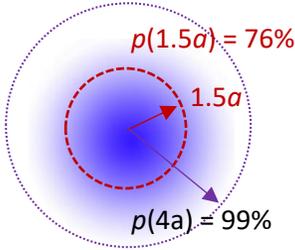
LERNWEG

Konzeptwechsel: Die **Wahrscheinlichkeit** spielt eine fundamentale Rolle in der Quantenphysik.

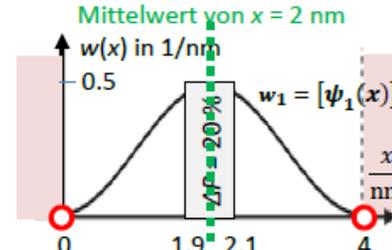
Wo ist das Elektron?

Auch Sek.II - Lernende 2024:
*nur wissen möchte man gerne wohl,
was man sich dabei vorstell'n soll.*

Quantitativ nur stationäre Zustände
 $\Leftrightarrow \psi$ ist reell.



$$\psi_1(r) = C_1 \cdot e^{-r/a}$$

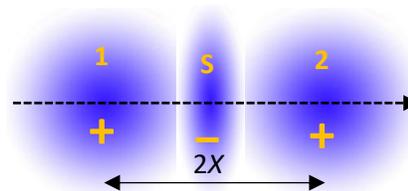


$$w(x) = \psi(x)^2$$



Mikrokosmos?
Makrokosmos?

Überlagerung
Dekohärenz



Born, Juni 1926: $w = \psi^2$ Dabei knüpfe ich an eine Bemerkung Einsteins über das Verhältnis von Wellenfeld und Lichtquanten an. (...) Dieses 'Gespensterfeld' bestimmt die **Wahrscheinlichkeit** dafür, dass ein Lichtquant (...) einen bestimmten Weg einschlägt.

Attraktiv, salopp (präzis): «Das Elektron ist überall (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit) und nirgends (mit Sicherheit)».

«Das Elektron ist nicht an einem Ort $x(t)$, sondern in einem (quantenmechanischen) Zustand $\psi(x)$.»

Wo stehen wir?

Einführung

Modul 1

Was ist Licht?

Modul 2

Wo ist das Elektron?

Lernende

Punkt-Teilchen sind tief verankert

Physik

Was weglassen?

Lernziele

Angestrebte Konzeptänderungen

Lernweg 'Elektron'

Vom Bohr-Modell bis zu Schrödingers Katze

Details

Ausschnitte aus dem Lerntext

Bilanz

Schülersicht

Verknüpfung

Klima & Quanten

Ergänzung

Quantenphysik im Schulalltag

Ausblick

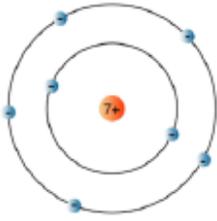
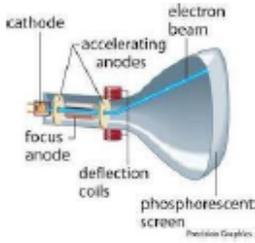
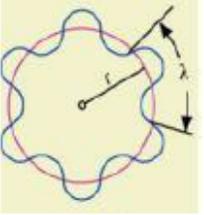
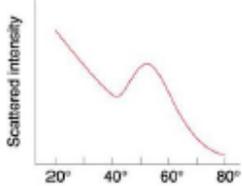
Mehr Quanten



QUANTEN/MATERIE

Wo ist das Elektron?

Antwort mit dem Einstein- Bohr- de Broglie- Schrödinger- Born- Lernweg

Etappen	Vorstellung vom Elektron	gebundenes Objekt 'Elektron' im Atom	freies Objekt 'Elektron' im Vakuum
halb-klassische  Mechanik	Ein Elektron ist 0 nur körnig; es ist ein klassisches Teilchen. 		
Wellenmechanik I 	Elektron 1 mit Welle; Welle begleitet das Teilchen, in 1 Dimension 		
Wellenmechanik II 	2 Etwas ist wellig; ψ -Welle in 3 Dimensionen 		
Quantenmechanik 	wellig & körnig 3 «zufällig» Wahrscheinlichkeitsverteilung $\psi^2 \Leftrightarrow$ Orbital 		
Überraschungen im Quantenland	Ein Thema ist die Frage nach dem Wirken des Zufalls. Ein anderes ist Schrödingers Katze ...		

Textausschnitte zur Illustration des Lernwegs

Einstein 1906: quantisierte Energie ganzer Atome



Die erste dieser Prüfungen war schon 1906 durch Albert Einstein am Diamanten erfolgt. Er konnte ein merkwürdiges Verhalten erklären: Während bei den meisten Stoffen die spezifische Wärme konstant ist (4.2 kJ/kg·K beim Wasser), nimmt sie beim Diamanten von 2.3 kJ/kg·K bei +1000°C auf 0.15 kJ/kg·K bei -100°C ab. Einstein nahm an, dass im Gitter gemäss Figur 2.1 die Atome nur quantisiert schwingen können. Zur Anregung braucht es eine minimale Energiezufuhr von $\Delta E = hf$.

h auch für Physik der Materie. Einstein erklärt anomale spez. Wärme des Diamanten mit quantisierten Schwingungen.

Ebenso unwichtig wie die Details der Bewegungen von Atomen in Kristallen scheinen die Details der Bewegungen von Gasmolekülen. Schon um 1920, als man sich noch keine Sorgen um den Zustand der Atmosphäre machte, war es gelungen, Schwingungs- und Rotations-eigenschaften von **Molekülen** wie



Hertha Sponer ¶

N_2 oder O_2 zu erklären. Sie sind die Hauptbestandteile der Luft. Man dachte sich ein Modell der Moleküle aus starren Kügelchen, die nicht nur quantisiert schwingen, sondern auch nur quantisiert rotieren durften. ¶ Hertha Sponer war eine der ersten Frauen in der theoretischen Physik. Sie schrieb ihre Dissertation «Über ultra-rote Absorption zweiatomiger Gase», d.h. Energiequanten im Ultrarot = IR. Von ihren männlichen Kollegen gefördert, wurde sie die erste Physik-Professorin in Göttingen. ¶

Hertha Sponer, eine der wenigen Frauen in der Quantenphysik

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Bohr 1913: Quantisierung im Atominnern

An dieser Stelle liefert die Natur eine Steilvorlage für die Quantenphysik: Während für Planeten, Satelliten usw. im Rahmen der Kepler-Gesetze *alle* Bahnradialen und Energien mit den passenden Geschwindigkeiten möglich sind, muss das bei den Elektronen in den Atomen anders sein! Sie senden nur gewisse *Spektral-linien* aus, wie Figur 2.6 zeigt. ¶

Dem Basler Gymnasiallehrer Johann Jakob Balmer war es gelungen, die Daten der sichtbaren Wasserstofflinien mathematisch zu fassen. In Balmers Formel tauchten erstmals *ganze Zahlen* in der Atomphysik auf. Später entdeckten Theodore Lyman und Friedrich Paschen gleiche Gesetze für Linien im ultravioletten und infraroten Bereich. Niels Bohr wollte mit seinem Atommodell begründen können, weshalb nur *gewisse Bahnen* möglich sind, und er musste Balmers Formel ableiten können. ¶



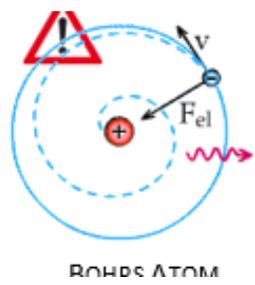
Die Spektroskopie gibt Hinweise auf die «Sphärenmusik der Atome». Wagenschein: Atom ⇔ Flügel.

Die Lernenden haben keinen intuitiven Zugang zur Spektroskopie.

Niels Bohr 1913:Auf den erlaubten Bahnen gilt: $rmv = k \cdot h / 2\pi$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$ (2.1) ¶



Beschleunigte Elektronen strahlen. Sie müssten daher ebenso strahlen wie die schwingenden, beschleunigten Elektronen in den Antennen von Hertz und Marconi oder heute im Handy (→ Abschnitt 1.1). Die elektromagnetische Strahlung transportierte Energie aus dem Atom weg. Das Elektron hätte weniger und weniger Energie und müsste abstürzen wie ein durch die Atmosphäre gebremster



Bohrs Modell: Bedingung für erlaubte Bahnen (mit h). ⇔

Elektrodynamik wird ausser Kraft gesetzt!

Modell ⇔ bewusste Vereinfachung.

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Bohr 1913: Grösse und Energie-Niveaus des H-Atoms

Mathematische Vertiefung = fakultative Ergänzung: Mit Bohrs halb-quantenphysikalischen Modell kann man den Wasserstoff und auch die Alkaliatome mit einem Leuchtspektrum (Natrium, Kalium, Rubidium, Cäsium und Francium) gut beschreiben. Das Leuchtspektrum wird durch die Kraft des Kern und den restlichen Elektronen eine gleiche Kraft, wie das eine Elektron. Wir rechnen nur zum H-Atom. Zuerst brauchen wir Bohrs Quantenzahlen.

(I) Auf den erlaubten Bahnen gilt: $r_k = n^2 a_0$

Zusätzlich gilt die klassische Physik der Kreisbewegung:

(II) Kreisbewegung:

Wir haben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Wir eliminieren v von einem Parameter, der die Quantenzahl k , an der die Bahn liegt, und vereinfachen, erhalten wir die sogenannte Bohrsche Bahnradius.

$$r_{Bohr} = \frac{\epsilon h^2}{\pi m e^2} = 53 \text{ pm} \quad (2.1a)$$

Wir sehen, dass die Grössenordnung des H-Atoms den Wert von rund 100 pm, der mit den Wellenlängen usw. übereinstimmt.

Ergänzung – Binnendifferenzierung!
PAM: MINT II – Übrige: PANORAMA 1925

Bohrs-Modell mit den klassischen Teilchen p^+ und e^- liefert beim Wasserstoff

genau die richtigen Werte der Spektrallinien, ungefähr die Atomgrösse und ist sehr anschaulich.

Auf Bohrs Modell reagierten die Physiker in Zürich unterschiedlich: Einstein, Professor an der ETH, war enthusiastisch. Endlich konnte man die Vielfalt der Spektrallinien durch Sprünge zwischen den **Energie-stufen** der stationären Bahnen übersichtlich erklären. (Figur 2.6) Endlich konnte man die Grössenordnung der Atome aus fundamentalen Grössen (e , m , h) ableiten. Doch Einsteins Uni-Kollege Max von Laue und Einsteins Privatdozent Otto Stern, beides später Nobelpreisträger, wanderten diskutierend auf den Üetliberg und leisteten den «Üetlischwur»: Wenn sich dieses verrückte Modell [von Bohr] als richtig herausstellt, würden sie die Physik an den Nagel hängen.

Die Berechnung des Bohr'schen Radius und der Energieniveaus des H-Atoms sind nur eine fakultative Ergänzung.

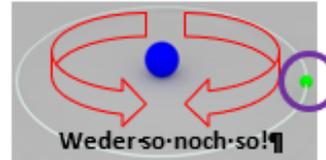
Bohrs Modell wurde 1913 durch von Laue und Stern kritisch gewürdigt und führte zum sogenannten «Üetlischwur».

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Zur Krise von Bohrs Atommodell

(1) In Bohrs Model ist das Wasserstoffatom flach, zweidimensional, 2D, **scheibenförmig**. Wirkliche Atome aber sind kugelig, dreidimensional, 3D, räumlich! ¶

(2) Im energieärmsten Zustand mit $k=1$ muss das Elektron in Bohrs Modell umlaufen. Experimentell findet man jedoch, dass im Grundzustand das Elektron **nicht kreist** und keinen Drall besitzt, also $k=0$ sein müsste. Dann müsste jedoch das Elektron durch den Atomkern hin und her pendeln. Das wäre, wie wenn Newtons Apfel in einem Schacht in der Erde dauernd durch den Erdmittelpunkt hin und her pendelte... ¶



(3) Mit dem Bohr-Modell kann man die Spektrallinien nicht einmal beim zweiteinfachsten Atom, dem **Helium**, genau ausrechnen. Auch der atomare **Magnetismus** macht Probleme. ¶

(4) Nach Bohr kann es, im Gegensatz zur alltäglichen Erfahrung in der Chemie, **keine Elektronenpaar-Bindung** geben. Beim H_2 müsste jedes der beiden Elektronen zugleich auf zwei Bahnen umlaufen! ¶



(5) Wolfgang Pauli berechnete in seiner Dissertation das H_2^+ , das einfachste Molekül. Mit einem Dreiteilchen-Modell ($2 \times p^+$ plus $1 \times e^-$) ergaben sich aber vom Experiment abweichende Energiewerte. ¶

Nachdem Max Born schon vor einiger Zeit festgestellt hatte, dass Bohrs scheibenförmige Atome in Kristallen zu falschen Werten führen, schrieb er am 21. Oktober 1921 aus Göttingen seinem Freund Einstein nach Berlin. Er klagte über die Inflation und fuhr fort: **Mit Pauli gehe ich daran, Quantenrechnungen über Atome zu machen. Vielleicht kommt etwas dabei heraus. Und dann kommt die berühmte Klage: Die Quanten sind eine hoffnungslose Schweinerei.** ¶



Bohrs anschauliches Modell:

- gibt scheibenförmige H-Atome,
- setzt im Grundzustand einen Drehimpuls voraus,
- funktioniert schlecht beim He und beim Magnetismus,
- setzt Elektrodyn. ausser Kraft!
- kann die Elektronenpaarbindung nicht erklären,
- Ironie: Pauli muss Dissertation mit falschem Modell rechnen.

Nach Rechnung mit Pauli findet Max Born 1921:

«Die Quanten sind eine hoffnungslose Schweinerei.»

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Louis de Broglie hat eine revolutionäre Idee.

Für seine kühne Vermutung entwickelt er eine theoretische Rechtfertigung folgender Art: «So wie die Wellenoptik umfassender ist als die Strahlenoptik, so muss eine neue Wellenmechanik umfassender sein als die alte Mechanik.» ¶

Er kommt zum genialen und revolutionären Schluss: ¶

*À toute particule matérielle de masse m et de vitesse v ¶
doit être associée une onde réelle. ¶*

Mit unseren Begriffen: Materie zeigt nicht nur den vertrauten Teilchenaspekt, sondern einen bis dato unbekanntes Wellenaspekt. ¶



L. de Broglie spekuliert, dass jedes materielle Objekt von «einer realen Welle begleitet» sein müsse.

De Broglie argumentierte mit der Relativitätstheorie; wir stützen uns auf eine Analogie mit dem Licht: ¶

Für die elektromagnetische Strahlung γ gilt (1.3): $\rightarrow p_{\gamma} = E_{\gamma}/c = hf_{\gamma}/c = h/\lambda_{\gamma}$ ¶

Daraus erhält man: $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \lambda_{\gamma} = h/p_{\gamma}$ ¶

Wir **nehmen nun an**, die Beziehung für Licht gelte genauso für die Materie und erhalten $\lambda_{\text{de Broglie}}$. Das ist natürlich keine mathematische Ableitung. Weder de Broglies relativistische Rechnung noch unsere Kurzfassung mit der Analogie können Beweise für die Gleichung (2.2) sein. (2.2) ist grundlegend neu! ¶

Simple Mathematik – revolutionärer Gedankengang!

Links steht der Wellenaspekt $\lambda_{\text{dB}} = h/p$ rechts steht der Teilchenaspekt $mv = p$ ¶

Gleichung (2.2) besitzt die gleiche Struktur wie Gleichung (1.2) für das Quantenobjekt «Licht». Ganz allgemein scheint auch Materie ein Quantenobjekt zu sein, allerdings eines mit Ruhemasse $m > 0$. Plancks Wirkungsquantum h taucht hier erneut auf, wieder in einem anderen Zusammenhang. ¶

L. de Broglie überträgt die Dualität vom Licht auf die Materie – mit h .

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Wieso merkt man nichts? – Materiewellen «pas entièrement...»

	WELLENASPEKT ERKENNBAR					TEILCHENASPEKT DOMINIERT			
Wellenlänge λ_{dB}	10 μm	1 μm	100 nm	10 nm	1 nm	100 μm	10 μm	1 μm	
Größenvergleich	Haar	Zelle	Virus	Molekül	Atom			Urakern	
Elektronen-Energie E	10 neV	1 μeV	100 μeV	10 meV	1 eV	100 eV	10 keV	1 MeV	
Umgebung	XX Lab.	X Lab.	Labor	Leben	Sonne		Novae	Schwarz L.	
Temp. Wärmeenerg.	100 μK	3 mK	1 K	300 K	10000K	3 MK	1 GK	300 GK	

DER WELLENASPEKT DES ELEKTRONS WIRD ERST BEI DEN SO KLEINEN ENERGIEN ERKENNBAR, BEI DENEN MAN DIE WÄRMESTRAHLUNG DER UMGEBUNG EXTREM ABSCHIRMEN MUSS. GRAU: RELATIVITÄT ZU BERÜCKSICHTIGEN.

Schon de Broglie selbst erkannte: *La présente théorie doit donc plutôt être considérée comme une forme dont le contenu physique n'est pas entièrement précisé que comme une doctrine homogène définitivement constituée.* Erst die Quantenmechanik, die «*doctrine homogène définitivement constituée*», konnte angeben, was schwingt. Sie wird in → 2.6 vorgestellt.

Für uns geht es jetzt darum, uns von der Richtigkeit von de Broglies kühner Idee durch Experimente überzeugen zu lassen. Der Nachweis von Materiewellen gelang natürlich erst, als man wusste, dass es sie geben sollte und in welchen Größenordnungen man mit passenden Experimenten nach ihnen suchen musste.

Reflexion: Was halten Sie von Einsteins Charakterisierung, de Broglies Idee sei eine «Konstruktion»? Vergleichen Sie diese mit Einsteins Selbsteinschätzung der Lichtquantenidee im Abschnitt 1.3!

Nur bei kleinsten Objekten und tiefsten Energien lassen sich die kurzen Wellen nachweisen.

De Broglies Wellen bilden nur eine Zwischenstufe.

Elektronen **nicht**

- «schwingende Spaghetti»
- Kugeln geführt von einem gewellten Zählrahmen

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Experimente zum Wellenaspekt - mit freien Elektronen

Ironie des Schicksals: Clinton Davisson wusste nichts von Materiewellen, als er in einem US-Industrie-labor an der Verbesserung von Radoröhren arbeitete. Schon 1920 hatte er Nickel mit Elektronen beschossen, war aber mit den Ergebnissen unzufrieden. Durch glückliche Umstände gelangten die Daten zu Max Born, der de Broglies Wellen kannte. Born deutete die Messwerte neu, und informierte Davisson. Das motivierte diesen, zusammen mit Lester Germer genauer zu messen. 1927 beobachteten sie bei einem Winkel von 50° zwischen einfallenden und gestreuten Elektronen ein Maximum, den «quantum bump». Die von Röntgenstrahlung an Kristallen bekannte Bragg-Streuung an den regelmässig angeordneten Atomen führt zu konstruktiver oder destruktiver Überlagerung, je nach Winkel. Elektronen zeigten also Wellenaspekt,

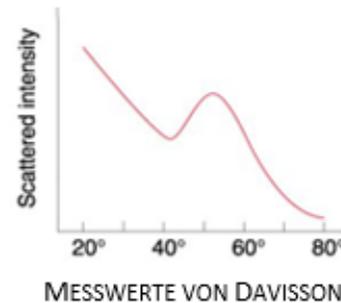
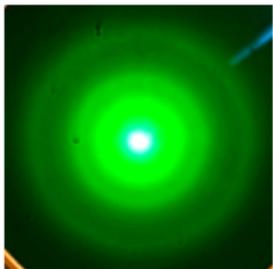


Illustration zur Wechselwirkung:
Davisson versteht Messung nicht.
de Broglie spekuliert genial.
Born als Vermittler.
Davisson findet, was er sucht.

Wenn man Elektronen mit etwa 2 kV beschleunigt und statt auf einen Nickel-Kristall auf ein Pulver aus Graphit-Kristallen schickt, erzeugt der Strahl auf dem Leuchtschirm eine Struktur, deren Helligkeit wie erwartet von innen nach aussen abnimmt. Zusätzlich gibt es jedoch Ringe, die auf die konstruktive und destruktive Interferenz der de Broglie-Wellen hinweisen. Die Ringe erinnern an die Himmelserscheinung Halo, wo Eiskristalle entsprechend der Wellenlängen des Lichts Maxima und Minima verschiedener Farben erzeugen. Die Einzelheiten werden im



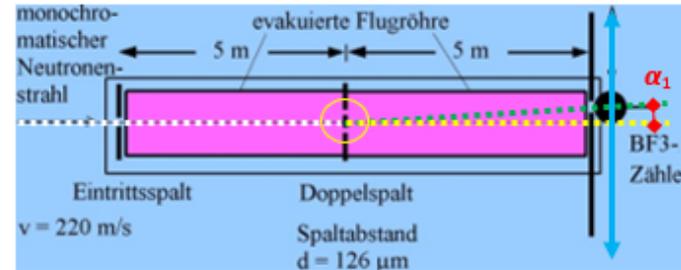
→ EXPERIMENT diskutiert, das auch die Überprüfung der de Broglie-Wellenlänge (2.2) ermöglicht.

Das Schulexperiment zeigt
unspektakulär
destruktive Interferenz,
also den Wellenaspekt
von Elektronen.

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

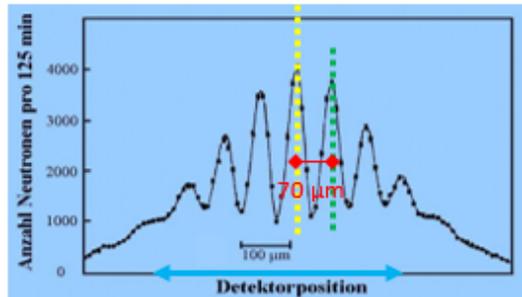
Experiment mit freien Neutronen – Vorbereitung auf ψ

Die Position des Zählers wird nach jeweils 125 Minuten um etwa $10\ \mu\text{m} = 1/100\ \text{mm}$ (!) in der Pfeilrichtung verschoben. Das Ergebnis der Messreihe ist in Figur 2.8b mit Symmetrieachse und Masstab dargestellt, Blickrichtung von rechts. Die Interferenzerscheinung wird nicht bloss als Hell-Dunkel sichtbar, sondern quantitativ durch die Zählrate angegeben.



FIGUR 2.8a: PRINZIP NEUTRONENBEUGUNG AM DOPPELSPALT

Auf der Symmetrieachse (gelb in den Figuren 2.8a und 2.8b) gibt es ein Maximum. Der Wellenaspekt ermöglicht es einen Neutron, das in der Flugröhre läuft, sowohl durch den linken als auch durch den rechten Spalt zu fliegen und auf der Symmetrieachse sich konstruktiv zu überlagern. Konstruktive Interferenz gibt es ebenfalls bei $\pm 70\ \mu\text{m}$, wo der Weg durch die eine Spalte genau 1 Wellenlänge länger ist als durch die andere. Bei einer halben Wellenlänge Wegunterschied gibt es Auslöschung, obwohl nur ein Neutron unterwegs ist. Man kann sagen: Ein *einzelnes Neutron interferiert* mit sich selbst!



FIGUR 2.8b: NEUTRONEN-INTERFERENZ

Das Experiment von Zeilinger et al.

mit Neutronen am Doppelspalt

- ist konzeptionell *einfach*,

- läuft *nicht mit Elektronen*,

- erlaubt eine quantitative

Auswertung im Gymnasium,

und

- bereitet mit der Zählrate auf

Borns Deutung $w = \psi^2$ vor.

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Stabilität des Atoms \Leftrightarrow Wellenaspekt des gebundenen Elektrons

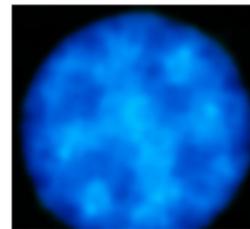
Erklärung mit Dualität: Das Elektron ist ein Quantenobjekt. Es zeigt sich nicht nur «körnig», sondern auch «wellig». Im Teilchenaspekt steckt die Ladung, die ins Proton fallen will und dort keinen Raum beansprucht. Im Wellenaspekt steckt die Tendenz, unendlich viel Raum zu beanspruchen.

😊 Die Welle-Teilchen-Dualität, das Sowohl-als-auch des Elektrons, sorgt für das Gleichgewicht. 😊

«Das H-Atom ist stabil durch das **Gleichgewicht** zwischen **Aufbauschen** und **Abstürzen**.»

Das Gleichgewicht beim Atom können Sie mit dem Gleichgewicht bei einem **Gasplaneten** vergleichen:

- Die Massenanziehung zieht nach innen und der Gasdruck wirkt nach aussen.
- Durch die Symmetrie entsteht eine Kugel mit einem Gleichgewichtsradius.
- Die Oberfläche ist wegen der Druckschwankungen flauschig.
- **Rotation ist nicht nötig!**



2.5.2 Das wellenmechanische Atommodell Schrödingers

Als Erwin Schrödinger Professor an der Universität Zürich war, beschäftigte er sich auf Anregung von Einstein mit de Broglies vager Vorstellung *d'une onde réelle associée*. Sie regte ihn in den Neujahrs-Skiferien 1925/1926 in Arosa zu einer Reihe von Artikeln unter dem Titel *Quantisierung als Eigenwertproblem* an. In unsere Sprache übersetzt, könnte man schreiben:

«Bestimmung der Energiewerte des Wasserstoffatoms mit Hilfe von abstrakten ψ -Wellen-Schwingungen (Psi-Wellen), die einer neuartigen Gleichung gehorchen.»

ERWIN SCHRÖDINGER, CA 35 JÄHRIG,
ALS ER AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH WIRKTE UND ψ (ER)FAND



Überwinden:

Mini-Sonnensystem / Bohr / de Broglie

neu & abstrakt:

Vergleich von Atom mit Gasplanet:

nach aussen: **Materiewellen** brauchen Platz

→ kinetische Energie

nach innen: **Ladung** \Leftrightarrow Teilchenaspekt

→ potentielle Energie

Quantisierung als Eigenwertproblem



«Bestimmung der Energiewerte des H-Atoms mit Hilfe von abstrakten ψ -Wellen-Schwingungen, die einer neuartigen Gleichung gehorchen.»

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Stabilität des Atoms: Herausforderung & Einstieg in Schrödinger

Mit unserer Umschreibung taucht eine Reihe von Fragen auf!

- (1) Was ist die physikalische Grundidee hinter den schwingenden ψ -Wellen?
- (2) Welche Eigenschaften haben die ψ -Wellen im H-Atom?
- (3) Was bedeutet dieses « ψ » überhaupt?
- (4) Wie sieht Schrödingers neue Gleichung, die das ψ bestimmt, genau aus?

→ grosser Klärungsbedarf

(1) Für die **physikalische Grundidee** können wir vom Gleichgewicht über statt mit Kräften mit Energien argumentieren: Der Gesamtenergie E der kinetischen Energie und dem Wellenaspekt λ von ψ über die elektrische Anziehung, die mit der potentiellen Energie V verbunden ist. Die Gleichung sagt:

$$\text{kinetische Energie (mit } \psi) + \text{potentielle Energie (mit } \psi) = \text{Gesamtenergie (mit } \psi)$$

(1.1) Die neue Gleichung sagt, dass die Gesamtenergie E bei einem mit v **frei** fliegenden Elektron gibt es keine Kräfte, die es abbremsen. Die Wellenlänge λ muss in der Ausbreitungsrichtung die de Broglie Wellenlänge sein. Die Wellenlänge λ quer zur Flugrichtung ist so gross, dass das ψ bei einem

Grundidee =

Weg zur Schrödinger-Gleichung:

Gesamtenergie =

kinetische Energie + potentielle Energie
verknüpft mit ominösen Psi-Wellen.

Ergänzung – Binnendifferenzierung!
PAM: Modul 3 – Übrige: Panorama 1950

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

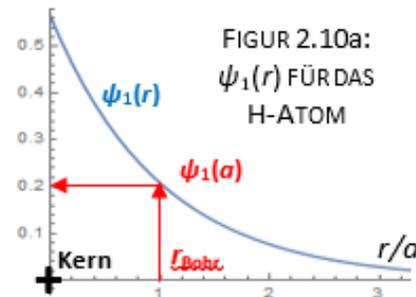
1s-Orbital der Chemie – ψ -Schwingung = stehende ψ -Welle

(1.2) Bei einem an den Kern **gebundenen** Elektron gibt es potentielle Energie, was die Mathematik verändert. Nun muss die ψ -Welle am Ort bleiben und irgendwie um den Kern herum schwingen. Die ψ -Welle ist eine **stehende Welle**. Weil sich zeitlich nichts ändert, bezeichnen wir eine solche stehende Welle als **Zustand**. In «ächt genialer» (so Einstein) Weise fand Erwin Schrödinger für das H-Atom:

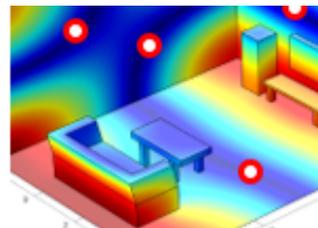
Der Grundzustand des H-Atoms wird beschrieben durch eine kugelsymmetrische Zustandsfunktion, die mit dem Radius r exponentiell abfällt: $\psi_1(r) = C_1 \cdot e^{-r/a}$ ($a = \text{Bohr-Radius}$). (2.3)

In Figur 2.10a ist die Funktion $\psi_1(r)$ dargestellt. Sie entspricht dem stabilen **Grundzustand des H-Atoms**. Zu ihr gehört das Energieniveau E_1 . ψ_1 hat ein Maximum im Atomkern und erstreckt sich exponentiell abnehmend bis ins Unendliche. In der Entfernung des Bohrschen Radius $r_{\text{Bohr}} = a$ beträgt ihr Wert einfach noch $1/e \approx 37\%$ des Anfangswerts C_1 .

Der Faktor C_1 hat den Zahlenwert 0.56... Er sorgt dafür, dass in diesem Zustand im ganzen Raum genau 1 zu diesem Kern gehörendes Elektron steckt.



(2.3) Noch grösser ist die Vielfalt in **drei** Dimensionen. Wenn Sie im Bad singen, stellen Sie fest, dass sich gewisse Tonhöhen besonders leicht erzeugen lassen. Dies sind Anzeichen von stehenden Wellen der Badzimmerschwingung. Der tiefste Ton gehört zur Grundschwingung, dem **Grundzustand**, mit der tiefsten Energie E_{100} . Höher sind die Obertöne mit E_{200} usw. In einem Würfel gibt es dreimal unendlich viele Varianten $E_{\text{würfel}}$. Wenn die Akustikerin einen neuen Konzertsaal plant, muss sie die Schwingungen möglichst genau vorherberechnen und unerwünschte mit passenden Massnahmen dämpfen. Figur 2.11c zeigt Schall im Computer-Zimmer.



FIGUR 2.11c: STEHENDE WELLEN IN EINEM COMPUTER-ZIMMER

Die Lernenden akzeptieren die gegebene Zustandsfunktion.

Plausibel:

Das H-Atom hat keine Aussengrenze.

Beruhigend:

Bohrs Radius tritt als Parameter auf.

Stehende Wellen in 1, 2 & 3 Dimensionen: Der Vergleich mit Badzimmerschwingungen spricht die meisten Lernenden an und reduziert das Unbehagen mit ψ .

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Vorbereitung der Antwort auf: ‘Was ist dieser «Feldskalar ψ »?’

Hochverehrter Herr Geheimrat Planck.

(...) Ich meine selbstverständlich nicht, dass nun alles wieder mit Mechanik zu erklären sei, dass etwa jene ψ -Schwingungen Massenschwingungen im Sinne der gewöhnlichen Mechanik sind. Im Gegenteil: sie oder etwas ihnen Ähnliches scheint aller Mechanik und Elektrodynamik zugrunde zu liegen.

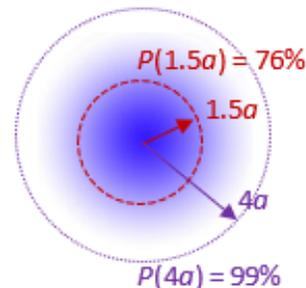
Gar Manches rechnet Erwin schon
Mit seiner Wellenfunktion.
Nur wissen möcht' man gerne wohl
Was man sich dabei vorstell'n soll.

Sicher war also anfangs nur, dass die ψ -Schwingungen *nichts Materielles* sind. Weil eine positive Bedeutungszuschreibung, eine Interpretation, fehlte, ist es nicht erstaunlich, dass der ETH-Postdoc Erich Hückel das abgedruckte Spottgedicht über das Vorgehen des Professors an Universität schrieb.

Wegen ihres Wellenaspekts sind die Elektronen manchmal hier und manchmal dort. Sie sind nie mit Sicherheit an einer bestimmten Stelle anzutreffen. Für sie gibt es keinen Fahrplan in der Art der «Fahrpläne für Planeten» der Astronomie oder von «Fahrplänen für Satelliten» für TV-Übertragungen.

Für Elektronen und andere Quantenobjekte gibt es nur Schrödingers Zustandsfunktion ψ . Mit ihr kann man Wahrscheinlichkeiten berechnen:

- Man findet, dass das Elektron innerhalb einer Kugel
- der Grösse $1.5a$ mit $P = 76\%$ Wahrscheinlichkeit,
- der Grösse $4a$ mit $P = 99\%$ Wahrscheinlichkeit anzutreffen ist
- usw.
- Erst in einer unendlich grossen Kugel findet man es mit $P = 100\%$!



FIGUR 2.12b:

WAHRSCHEINLICHKEIT BEIM H-ATOM
ORBITALE SIND FLAUSCHIG!

Das Gedicht gefällt.

Es beruhigt die Lernenden, dass sogar Schrödinger am Anfang nicht genau wusste, was das ψ ist.

Im Anschluss an ein RTM-Bild wird von «flauschigen Atomen» gesprochen.

Das erlaubt eine quantitative Antwort auf die Titelfrage. Nur Wahrscheinlichkeitsausagen zum Ort des Elektrons sind möglich!

«DAS ELEKTRON IST ÜBERALL UND NIRGENDS».

Es ist überall mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, aber nirgends mit Sicherheit anzutreffen!

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Borns Regel bringt die Wahrscheinlichkeit ins Spiel.

- (1) Heisenberg, Jordan und er hätten zuerst die Auffassung vertreten, dass *eine exakte Darstellung der Vorgänge in Raum und Zeit überhaupt unmöglich sei* (...)
- (2) *Schrödinger auf der anderen Seite scheint den ψ -Wellen eine Realität von der selben Art zuzuschreiben, wie sie Lichtwellen besitzen.* (...) *Keine dieser beiden Auffassungen scheint mir befriedigend.*
- (3) *Ich [Born] möchte versuchen, hier eine dritte Interpretation zu geben und ihre Brauchbarkeit an den Stossvorgängen zu erproben. Dabei knüpfe ich an eine Bemerkung Einsteins über das Verhältnis von Wellenfeld und Lichtquanten an.* (...) **Dieses 'Gespensterfeld' bestimmt die Wahrscheinlichkeit** dafür, dass ein Lichtquant (...) einen bestimmten Weg einschlägt.

Wir erläutern die Bornsche Regel in Figur 2.13a anhand einer idealisierten Version von Zeilingers Neutronenexperiment, einem elastischen Stoß von Neutronen mit einem Doppelspalt.

(1) In der **Theorie** ist der Zustand des Neutrons nach dem Stoß durch die Summe der «Gespensterfelder» $\psi_{\text{nach}} = \psi_1 + \psi_2$ zu **berechnen**.

ψ_{nach} = maximal, wenn beide, ψ_1 und ψ_2 , gleichzeitig entweder maximal oder minimal sind.

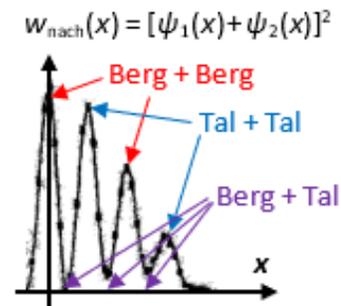
$\psi_{\text{nach}} = 0$, wenn sich ψ_1 und ψ_2 gerade aufheben:

Wellenberg + Wellental = nichts; $+A + (-A) = 0$.

(2) Im **Experiment** kann man die Verteilung der Wahrscheinlichkeit pro Messpunkt, die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$, **messen**.

(3) **Borns Regel** verbindet die Theorie ψ_{nach} mit dem Experiment $w(x)$ durch Quadrieren:

$$w_{\text{nach}}(x) = [\psi_{\text{nach}}]^2 = [\psi_1(x) + \psi_2(x)]^2$$



FIGUR 2.13a: BORN'S REGEL
VERBINDET DIE WELLE
DER THEORIE
MIT DEM TEILCHEN
DER MESSUNG

Borns Originaltext erläutert das Entstehen der Wahrscheinlichkeitsinterpretation $w = \psi^2$.

(30 Jahre lang keinen Nobelpreis)

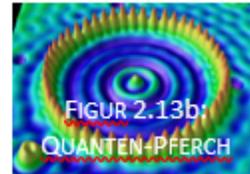
Ausgehend von Zeilingers Experiment wird die Beziehung zwischen dem abstrakten ψ und den gemessenen Zählraten besprochen.

Eine Minderheit der Lernenden lässt sich bereits von diesem einen Beispiel überzeugen.

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

ψ «verstehen» - *Wahrscheinlichkeit irritiert Einstein.*

Man könnte meinen, die Darstellung eines atomaren Pferchs in Figur 2.13b zeige ein Bild der stehenden ψ -Welle eines eingeschlossenen Elektrons. Doch die mit einem RTM generierte Abbildung ist das Ergebnis einer Messung und stellt damit eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* $w(x,y)$, aber keine ψ -Welle dar. Das Minimum von w ist nie negativ, sondern nur $w = 0$. Wir bilanzieren:



Eine ψ -Welle ist eine «Wurzel aus Wahrscheinlichkeitsdichte»-Welle.



Eine ψ -Welle ist abstrakt.



Eine Wahrscheinlichkeitsdichte-Welle kann man mit einer Virusdichte-Welle veranschaulichen...

Die Wurzel aus einer Wahrscheinlichkeitswelle ist etwas sehr Abstraktes!

2.6.2 Hitziger Streit zwischen Physikern

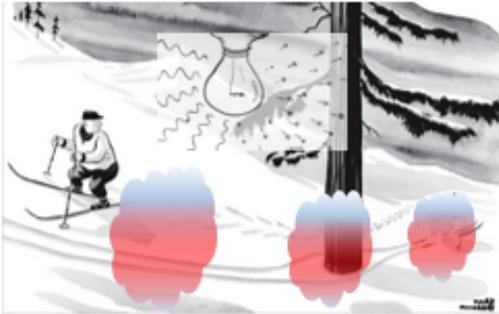
Zufälliges Geschehen war vom radioaktiven Zerfall bekannt, störte aber nicht, weil die noch unbekanntes Gesetze des Atomkerns dies wohl später erklären würden. In der Atomhülle war es anders. Einstein schrieb im April 1924 an Born: *Bohrs Meinung über die [Licht-] Strahlung interessiert mich. Aber zu einem Verzicht auf die strenge **Kausalität** [jede Wirkung hat eine Ursache] möchte ich mich nicht treiben lassen, bevor man sich nicht noch ganz anders dagegen gewehrt hat als bisher. Der Gedanke, dass ein einem Strahl ausgesetztes Elektron aus freiem Entschluss den Augenblick und die Richtung wählt, in der es fortspringen will, ist mir unerträglich. Wenn schon, dann möchte ich lieber Schuster oder gar Angestellter einer Spielbank sein als Physiker.*

Die Wahrscheinlichkeits-Interpretation irritierte Einstein zeitlebens.

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

ψ «verstehen» wie Lichtquant «verstehen» - ψ anwenden

③ Wenn man beim Quantenobjekt herausfinden könnte, durch welchen Spalt es gegangen ist, hätte man seinen Zustand ψ derart verändert, dass es seinen Wellenaspekt verloren hätte und zu einem anderen Quantenobjekt, einem quasi klassischen Teilchen ④ geworden wäre. Das scheint im ersten Moment unglaublich, doch es ist so. Ein Experiment, das dies zeigt, wird in → 3.1.4 vorgestellt. In 1.7 hatten wir Richard Feynmans Aussagen über Quantenobjekte auf das massenlose Licht bezogen. Wir übertragen sie folgendermassen auf Elektronen und andere Quantenobjekte mit $m > 0$:



FIGUR 2.14b: QUANTEN-SKIFAHNERIN!

philosophisches
Anknüpfen an Modul 1

Das QO. am Doppelspalt:
besseres Bild!

«Die W-T-Paradoxie ist nur
scheinbar», sagt Feynman!

(1) «Quantum objects are neither.» – Aber: «Quantum objects are like either.»

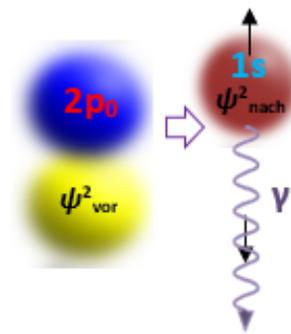
(2) The 'paradox' is only a conflict between reality and our feeling of what reality 'ought to be'.

Wir betrachten einen Übergang eines angeregten H-Atoms von $n = 2$ nach $n = 1$. Geht es vom angeregten Zustand mit der Energie $E_2 = -3.40$ eV in den Grundzustand mit $E_1 = -13.6$ eV über, strahlt es die Energie $\Delta E = +10.2$ eV in Form von ultraviolettem Licht ab (Lyman- α Linie):

$$\lambda = hc / \Delta E = 121 \text{ nm}; f = E/h = 1.7 \text{ PHz},$$

Bei solchen Prozessen müssen Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltungssatz wie in der klassischen Physik erfüllt sein. Daher bewegt sich das 1s-Atom in Figur 2.16 nach oben, während das Lichtquant γ mit dem Impuls $p = h/\lambda$ nach unten wegfliegt.

Bemerkung im Hinblick auf das Klima: Diese Überlegungen gelten auch für Absorption und Emission von IR-Quanten durch CO_2 -Moleküle. Allerdings sind Moleküle komplizierter als Atome. Mehr in → K.3.



FIGUR 2.16: $2p_0 \rightarrow 1s$

Anknüpfen an Modul 1:

«Erzeugung von Licht»

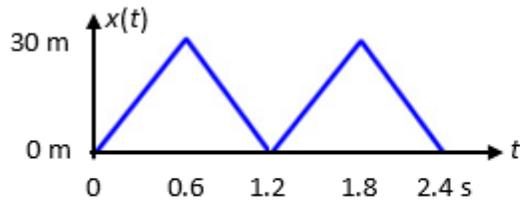


Zustandsänderung $\psi_{\text{vor}} \rightarrow \psi_{\text{nach}}$

Modul 2: Klassische Mechanik – Quantenmechanik:

Ein Objekt im Potentialtopf zeigt die Unterschiede

(1) Nehmen wir einen Puck auf einem Eishockeyfeld. Unter idealen Bedingungen könnte er praktisch



FIGUR 2.17: WEG-ZEIT-GESETZ $x(t)$

erhalten das Weg-Zeit-Gesetz von Figur 2.17. Dabei ist der Puck zu jeder Zeit an einem bestimmten Ort und kann jede beliebige Geschwindigkeit, also jeden Impuls respektive jede Energie besitzen. Der Puck kann auch ruhen: $x = 0$ für alle Zeiten t .

ungebremst über 30 m zwischen den Banden hin- und herfliegen. Er könnte eine Geschwindigkeit von 50 m/s erreichen und dabei eine Bewegungsenergie von 20 J besitzen. Der Puck ist ein klassisches Objekt und die Banden bilden unseren Potentialtopf, der nur eine Dimension, die Breite $b = 30$ m, besitzen soll. Wir können das Ganze mit einer schnellen Kamera verfolgen und

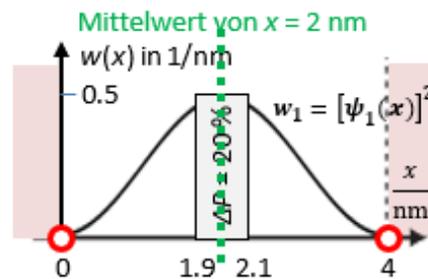
Von der Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ kommt man zur **Wahrscheinlichkeit** ΔP für einen Bereich der Breite Δx , wie von der Massendichte zur Masse: Mit Δx statt V und $w(x)$ anstatt ρ erhalten wir

$$\Delta P = w(x) \cdot \Delta x.$$

(1) Der wahrscheinlichste Wert das Elektron anzutreffen, liegt in der Mitte zwischen 0 und 4. Der quantenmechanische *Mittelwert oder Erwartungswert für den Ort x* ist 2 nm und stimmt mit demjenigen der klassischen Physik überein.

(2) Doch das Elektron ist überall (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit)! Beispielsweise findet man die Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Intervall $1.9 < x < 2.1$ zu anzutreffen, ohne Integralrechnung als Fläche in der Figur 2.18b:

$$\Delta P(\text{zwischen } 1.9 \text{ und } 2.1) = w(x) \cdot \Delta x \approx 0.5 \text{ nm}^{-1} \cdot 0.2 \text{ nm} = 0.2 = 20\% = \text{getönte Fläche}$$



FIGUR 2.18b:

WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE w
UND WAHRSCHEINLICHKEIT (FLÄCHE)
IM GRUNDZUSTAND

Das Eisfeld liefert einen Potentialtopf.

Die Position des Pucks kann nachverfolgt werden. Jede Energie ist möglich.

⇔ kontinuierliches Spektrum

⇔ alle Farben

Der Quantum-Dot ist ein Potentialtopf für das Elektron. Seine Zustandsfunktion erlaubt nur

Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Nur bestimmte Energien

⇔ diskretes Spektrum

⇔ bestimmte Farbe

(0) Das Elektron ist in einem Zustand $\psi_n(x)$. Es ist «immer überall und nirgends».

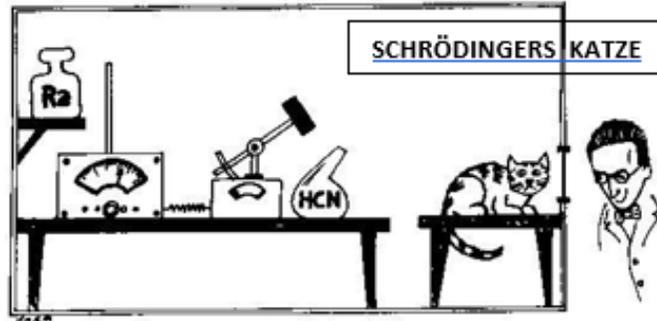
(1) Die **Energie E** des Elektrons ist **quantisiert**. Nur bestimmte Energieänderungen sind möglich.

(2) Die **Farben** des Quantenpunkts zeigen, dass **die Quanten-** und **nicht die klassische Mechanik** gilt.

Modul 2: «Wo ist das Elektron?»

Von Schrödingers Katze zum Messproblem

Schrödinger konstruiert den *burlesken Fall* mit einer Katze. Sie ist zusammen mit einem radioaktiven Präparat und einem Mechanismus in einem Kasten eingesperrt und zeigt den Zustand des Systems an. Das Präparat ist so, dass die Katze nach einer Stunde noch mit einer Wahrscheinlichkeit von $P = 50\%$ lebt. Dieses P ergibt sich aus der Quantenphysik des radioaktiven Atoms. Bevor man den Kasten öffnet, weiss man nichts Bestimmtes. Das ψ des Systems «Katze plus Höllenmaschine» ist derart, dass in ihr die lebende und die tote Katze zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind (Schrödinger).



Man lehrte die Generation, zu der Einstein, Bohr und ich gehören, dass eine objektive physikalische Welt existiert, die sich nach unveränderlichen Gesetzen entfaltet, die von uns unabhängig sind. Wir betrachten diesen Vorgang, wie das Publikum im Theater ein Stück verfolgt. [Dieser Standpunkt wird als «naiver Realismus» bezeichnet. HPD] (...) Die Quantenmechanik deutet indessen die in der Atomphysik gewonnene Erfahrung auf andere Weise. Wir können den Beobachter einer physikalischen Erscheinung nicht mit dem Publikum bei einer Theateraufführung vergleichen, sondern eher mit dem bei einem Fußballspiel, wo (...) Applaus oder Pfeifen (...) einen ausgeprägten Einfluss auf die Schnelligkeit und Konzentration der Spieler und damit auf den beobachtbaren Vorgang haben. Ein noch besseres Gleichnis ist das Leben selbst, wo Publikum und Akteure die gleichen Personen sind.

Hängt das ganze Universum zusammen? Aus der Katzendiskussion ergibt sich, dass die folgende Aufteilung des Universums in drei Bereiche *willkürlich* ist:

Universum = Messobjekt + Messgerät + Rest (des Universums)

Schrödingers Katze ist das populärste Wissen über Quantenphysik. Sie illustriert den Messprozess. Dieter Zeh erkennt die Bedeutung der Dekohärenz bei Überlagerungszuständen.

Zum Messprozess:

Die in der klassischen Physik vorausgesetzte Trennung zwischen messendem Subjekt und gemessenem Objekt verschwindet in der Quantenphysik: Verschränkung



Bilanz: Was sagen die Lernenden?

Aus den Lerntagebüchern:

- Es **überrascht** mich, dass sich, bei Gültigkeit von de Broglies Theorie, Materie überlagern und **an einem anderen Ort auslöschen** kann. (Davide, 11. Sj.)
- Mich hat es **überrascht**, wie viele schlechte Erklärungen es gebraucht hat, um die **Stabilität des Atoms** richtig erklären zu können. Ich hatte mir dazu im Chemieunterricht nie Gedanken darüber gemacht. (Elisabeth, 11. Sj.)
- **Ich fühlte mich** [bei den Schwierigkeiten mit Schrödingers ψ -Wellen] sehr von dem Zitat auf S. 2.14 **verstanden** (...) «Nur wissen möchte' man gerne wohl – Was man sich dabei vorstell'n soll.» (Mia, 11. Sj.)
- Mich **fasziniert**, dass beim H-Atom **ein einziges Elektron** im Stande ist, alleine durch die Bewegung **eine ganze Kugelform auszufüllen**. (Cécile, 11. Sj.)

Verbleibende «messiness»:

Mir ist es sehr schwergefallen, sich den **Wellencharakter von Teilchen bildlich** vorzustellen. Soll ich mir unter 'Materiewellen' echte Wellen schwingender Materie oder ein Teilchen auf einer Wellenbahn vorstellen? (Thys, 11. Sj.)

Man kann keinen präzisen Radius eines Atoms angeben. (...) Man weiss aber nicht, wie gross das Atom **jetzt wirklich** ist. (Sabine, 11. Sj.)

Erfreuliche Entwicklung in NoS (Wesen von Wissenschaft):

Es überraschte mich, dass die **Physik** im Grunde **nicht einfach schon da ist**, sondern **von Menschen erarbeitet wird**. (Thea, 11. Sj.)



Auf dem Weg zur Quantenmechanik:

Meine Einschätzung:

«Wo ist das Elektron?» ist im Grundlagenfach ab dem 11. Schuljahr ein zweckmässiger Weg in Richtung Quantenmechanik.

Um mit dem Zustandsbegriff vertraut zu werden, sind mehr Zeit und Arbeit nötig.



Auf dem Weg zur Quantenmechanik:

Was sagen Sie zu diesem Weg?

Welche Erfahrungen haben Sie?

Ihre Anregungen, Vorschläge oder Fragen!

Bilanz mit Leitideen des Moduls 2: «Wo ist das Elektron?»

WO IST DAS ELEKTRON? – BILANZ DES MODULS 2

Roadmap 0 *Teilchenaspekt der Materie = korrekter, aber unvollständiger Kenntnisstand von 1920:* «Körnig» sind Masse m , Ladung q , Energie E , Impuls p und die 10^{-10} m kleinen Atome. Das Planetenmodell des Atoms ist anschaulich und einleuchtend, aber falsch; Bohrs Modell hat viele Mängel.

LEITIDEE 2.0: Das Planetenmodell des Atoms ist anschaulich, aber falsch; Bohrs Modell ist veraltet.

Roadmap 1 *Dualität auch der Materie => Wellenaspekt der Materie = Idee von Louis de Broglie:* Jedem Objekt mit einer Masse m wird eine Welle mit der **de Broglie-Wellenlänge** zugeordnet.

LEITIDEE 2.1a: Elektronen, Neutronen usw. zeigen sich körnig und wellig, sind also Quantenobjekte.

De Broglies Gleichung verbindet bei Materie **Wellen-** und **Teilchen**aspekt durch h :

$$\lambda_{dB} = h/mv \quad \lambda_{dB} \text{ ist nur in der Mikrowelt bedeutsam.}$$

Laufende Wellen erklären Interferenzerscheinungen; **tunnelnde** Wellen erklären das RTM. Die Dualität des Elektrons erklärt die **Stabilität des Atoms auch ohne Rotation** qualitativ.

LEITIDEE 2.1b Die Dualität des Elektrons erklärt die Stabilität der Atome ohne Umlauf.

LEITIDEE 2.1c «Das Elektron ist überall und nirgends.» – Atome sind flauschig.

Roadmap 2 *Abstrakte ψ -Wellen, beim Atom ψ -Zustände = Präzisierung durch Erwin Schrödinger:* Jedem «Teilchen» mit Masse m muss eine **abstrakte Welle ψ** zugeordnet werden. Dem Elektron im Atom wird eine **stehende Welle = Zustand ψ** zugeordnet. Es gibt Grund- und angeregte Zustände. In Schrödingers Gleichung für ψ treten **Wellen-** und **Teilchen**aspekt der Materie zusammen mit h auf.

LEITIDEE 2.2: Elektronen sind nicht auf einer Bahn $x(t)$, sondern in einem Zustand ψ .

Roadmap 3 *Borns Wahrscheinlichkeitsdeutung der ψ -Wellen verbindet Welliges mit Körnigem.* Mit Borns Regel liefert die ψ -Welle die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Wirken des **Teilchens**. Im Grundzustand $\psi_1(r)$ resultiert die «Flauschigkeit» des H-Atoms gemäss $w_1(r) = [\psi_1(r)]^2 = C_1^2 \cdot e^{-2r/a}$. Die physikalischen Zustände ψ_1 usw. entsprechen den 1s-Orbitalen usw. der Chemie.

LEITIDEE 2.3: Borns Regel verbindet das Wellige und das Körnige: $w = \psi^2$.

Überraschungen im Quantenland: Schrödingers Katze und die fehlende Grenze Subjekt-Objekt.

«Bohr» erschüttern!

W-T-Dualität einsetzen!

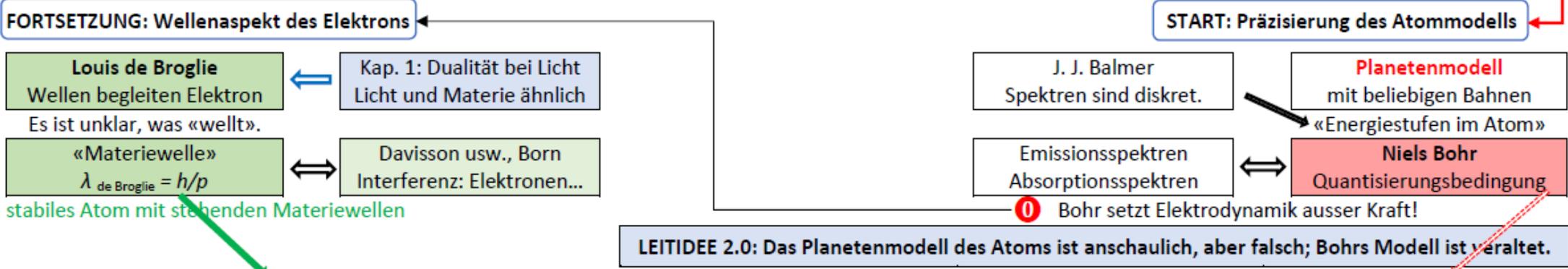
Stabilität besser erklären.

Saloppe Vorstufe

Antwort auf die Titelfrage!

Wahrscheinlichkeits-
interpretation

MODUL 2	Lernweg zu einem quantenphysikal. Verständnis von Atom und Elektron	Info für die Lehrperson
10-12 Lektionen 11./12. Sj.	EINSTELLUNG ZUM THEMA: neutral bis negativ; Materie ist voluminös, schwer und träge ... VORSTELLUNGEN (Ende Sek I): Materie ist in planetenartigen Atomen strukturiert. Das Elektron ist ein kleines Korn. VORKENNTNISSE (beim Start): Newtons Mechanik gilt für Massenpunkte. Coulombkraft. Gesetze der Chemie gelten für Atome.	



Wellenaspekt des Elektrons	LEITIDEE 2.1: Elektronen, Neutronen usw. zeigen sich körnig und wellig, sind also Quantenobjekte.	Teilchenaspekt des Elektrons
①	Wellenlänge λ_{dB} $f_{dB} = ?$ $c_{dB} = ?$	H-Atom ohne Rotation
	$\lambda_{\text{de Broglie}} = h/mv = h/p$	(3) Dualität gibt stabiles H-Atom gemäss Modell «Gasplanet».
	Masse m , Ladung q , Impuls p	s, p, d ... Formen vom H-Atom Orbitalmodell der Chemie
	LEITIDEE 2.2: Elektronen sind nicht an einem Ort x, sondern in einem Zustand ψ.	
	② Erwin Schrödinger präzisiert de Broglies Idee und findet Gleichung für abstrakte ψ -Wellen. H-Atom-Energistufen ergeben sich aus den stehenden ψ -Wellen, den Zustandsfunktionen.	

LEITIDEE 2.3: Das Elektron ist überall (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit) und nirgends (mit Sicherheit). – Atome sind flauschig.

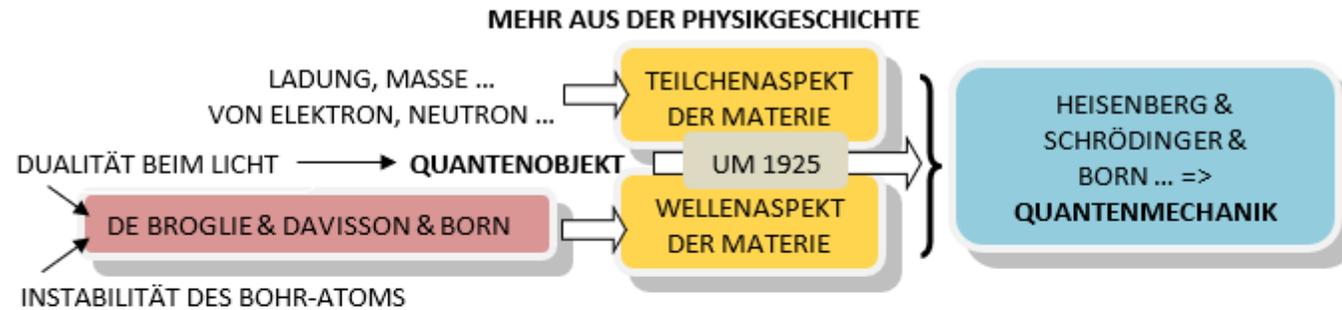
③ Max Borns Regel: $w(x) = \psi^2$ verknüpft Welliges mit Körnigem durch Wahrscheinlichkeit. Keine Kausalität in der Quantenwelt! Das missfiel Einstein und Schrödinger.

PRAGMATISCHE EBENE	Begriffe, Formeln, Kompetenzen
kreisende Elektronen strahlen	Atome sind etwa 10^{-10} m klein
Dualität bei der Materie	$\lambda_{\text{de Broglie}} = h/mv$
Quantenobjekt mit Ruhemasse	$\lambda_{\text{de Broglie}} = h/p$
Elektronenbeugung am Doppelspalt.	Tunneleffekt, RTM
Elektronen sind überall und nirgends.	ψ -Funktion
Elektronen sind nicht an einem Ort, sondern in einem Zustand ψ .	
stehende Wellen im Atom	ψ_1 mit E_1
Wahrscheinlichkeitsdichte	$w(x) = \psi^2$
Antreffwahrscheinlichkeit	$\Delta p(x) = w(x) \cdot \Delta x$

ONTOLOGISCHE EBENE	Kritisierte / angestrebte Konzepte
2.0a) Planetenmodell	ist teilchenartig, anschaulich, ohne Quantisierung.
2.0b) Bohrs Modell	ist irreführend (Bahn) und teilweise falsch (flach).
2.1a) Elektronen ...	zeigen Wellenaspekt, also Dualität: Quantenobjekte.
2.1b) Atome sind ohne Umlauf	stabil dank der Dualität des Elektrons.
2.2a) Das Elektron ist nicht an einem Ort x ,	sondern in einem Zustand ψ .
2.2b) Stehende ψ -Wellen	erklären s-, p-, d-Orbitale der Chemie.
2.3a) Wahrscheinlichkeitsdeutung	verbindet Welliges mit Körnigem.
2.3b) Wahrscheinlichkeitsdichte	gibt Flauschigkeit quantitativ.
2.3c) $w(x)$ mit Geometrie	aufaddiert liefert Wahrscheinlichkeit.

Bilanz mit Leitideen des Moduls 2: «Wo ist das Elektron?»

Zweiter Teil



Zusammenfassung aus der
Physikgeschichte

WEITERE ERKENNTNISSE ZUM WESEN DER PHYSIK

- ④ Physik ist – wie jede echte Wissenschaft – **offen für neue Erkenntnisse**: Oft wird das Alte transformiert und ins Neue integriert. Wenn Neues hinzukommt, muss oft Altes über Bord, z. B. «Bohr»!
- ⑤ **Theorie und Experiment** stehen in einer wechselseitigen Abhängigkeit. Physikalischer Fortschritt geht manchmal von neuen Daten aus, oft aber auch von neuen Ideen, z. B. bei Louis de Broglie!
- ⑥ **Klimaphysik** stützt sich stark auf Quantenphysik.

Wissenschaft ist offen.

Es gibt nicht *die* Methode.

Klima ist interdisziplinär

MILQ

- **Wesenszug 1 (Statistisches Verhalten):** In der Quantenmechanik sind im Allgemeinen nur statistische Vorhersagen möglich.
- **Wesenszug 2 (Fähigkeit zur Interferenz):** Einzelne Quantenobjekte können zu einem Interferenzmuster beitragen, wenn es für das Versuchsergebnis mehr als eine klassisch denkbare Möglichkeit gibt. Keine dieser Möglichkeiten wird dann im klassischen Sinn „realisiert“.
- **Wesenszug 3 (Eindeutige Messergebnisse):** Auch wenn ein Quantenobjekt in einem Zustand keinen festen Wert der gemessenen Größe hat, findet man immer ein eindeutiges Messergebnis (dies ist das Messpostulat der Quantenmechanik).
- **Wesenszug 4 (Komplementarität):** Beispielhafte Formulierungen sind: „Welcher-Weg-Information und Interferenzmuster schließen sich aus“ oder „Quantenobjekte können nicht auf Ort und Impuls gleichzeitig präpariert werden.“

leifi

Welle - Teilchen - Dualismus

- Einige Experimente können besser mit dem Wellenmodell, andere besser mit dem Teilchenmodell des Lichtes erklärt werden.
- Beide Modelle orientieren sich an unseren makroskopischen Erfahrungen, die zur Beschreibung der Mikroskopischen kaum geeignet sind.
- Die Quantenphysik bildet ein den beiden Modellen übergeordnetes (stark mathematikorientiertes) Modell.

Didactical Reconstruction of Chapter 2: «Matter: Particle or wave?»

A Qualitative Introduction to Quantum Mechanics

Physics content structure =

non relativistic, 1 particle, no spin QM

- «old quantum mechanics»
- time independent Schrödinger equation
- H-atom, tunnel effect
- time dependent Schrödinger equation
- philosophy of quantum mechanics

elementarization



Content structure for instruction =

particle-wave-duality also for matter

- size of atom => Bohr's atom => de Broglie's atom
- matter also shows wave aspect: idea & experiments
- standing wave => orbital model = chemist's atom
- spontaneous decay in electron cloud and nucleus
- Schrödingers cat

construction



(Duit et al. 2007)

Elementary Idea: Matter is a quantum object and shows wave aspect & particle aspect similar to light. ↔

Atom: appearance, size, stability, energy

Free particles: appearance, behaviour, pictures

Chance: statistics, expectation value, fluctuation

Philosophy: «quantum chance» kills «cause and effect»

Einige Quellen

- Bitzenbauer, P. & Meyn, J.-P. (2020). Inhaltsvalidität eines Testinstruments zur Erfassung deklarativen Wissens zur Quantenoptik. *PhyDid-B - Didaktik der Physik - Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung*, 149-155.
- Born, M. & Biehm, W. (1968). Dualism in quantum theory. *Physics Today*, 21 (8), 51.
- Brachner, A. & Fichtner R. (1977). *Quantenmechanik für Lehrer und Studenten*. Hannover: Schrödel.
- de Broglie, L. (1924). *Recherches sur la théorie des Quanta*. Paris: Université.
- Bungum, M. et al. (2015). ReleQuant – Improving teaching and learning in quantum physics through educational design research. *NorDiNa Nordic Studies in Science Education*, 112, 153-168.
- Einstein, A. (1905). Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichts betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 17, 132-148.
- Einstein, A. (1909). *Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung*. *Physikalische Zeitschrift*, 10, 817–825.
- Feynman, R. P. (1964). *The Character of Physical Law. – The 1964 Messenger Lectures*. Cambridge (MA): MIT Press. Video: <https://twitter.com/bbcarchive/status/1025372232892198912>
- Haroche, S. & Raimond, J. M. (2006): *Exploring the Quantum*. Oxford: University Press.
- Hoehn, J. & Finkelstein, N. (2018). Students' flexible use of ontologies and the value of tentative reasoning: Examples of conceptual understanding in three canonical topics of quantum mechanics. *Phys. Rev. Phys. Ed. Research*, 14, 010122.
- Kattmann, U., Duit, R., Groppegiesser, H. & Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 3, 3, 3-18.
- Krijtenburg-Lewerissa, K. et al. (2017). Insights into teaching quantum mechanics in secondary and lower undergraduate education. *Physical Review Physics Education Research*, 13, 010109.
- Kiefer, C. (2015) (Hrsg.). *Albert Einstein – Boris Podolsky – Nathan Rosen. Kann die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Realität als vollständig betrachtet werden?* Berlin: Springer.
- Lichtfeldt, M. (1992). *Schülervorstellungen in der Quantenphysik und ihre möglichen Veränderungen durch Unterricht*. Essen: Westarp.
- Müller, R. (2003). *Quantenphysik in der Schule*. Berlin: Logos.
- Müller, R. & Schecker, H. (2018). Schülervorstellungen zur Quanten- und Atomphysik. In H. Schecker et al. (Hrsg.) *Schülervorstellungen und Physikunterricht* (S. 209-224). Berlin: Springer.
- Schorn, B. (2014). *Quantenphysik in der Schule. Eine Unterrichtskonzeption zur Einführung in die Quantenphysik für die 10. Jahrgangsstufe*. Dresden: Technische Universität (Dissertation).
- Stadermann, H. & Goedhart, M. (2020). Secondary school students' views of nature of science in quantum physics. *Int. J. of Sci. Education*, 42 (6), 997-1016.
- Yoon, T. H. & Cho, M. (2021). Quantitative complementarity of wave-particle duality. *Science Advances*, 7, eabi9268.