



UZH - Weiterbildung für Lehrpersonen an Maturitätsschulen

Elemente der Quantenphysik an Maturitätsschulen

Unterrichtsvorschläge und ein Seitenblick auf die Klimaphysik

Quanten im Ergänzungs- und im Schwerpunktfach *Von Heisenberg bis Haroche*

Hans Peter Dreyer



FACETTEN DER QUANTENPHYSIK – ELEMENTE DER QUANTENPHYSIK

Was ist Licht?
Ein Quantenobjekt!



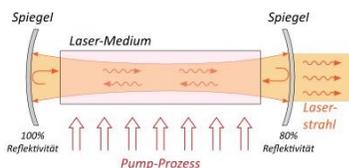
Semiklass. QP d. Lichts

Licht ist **nicht anschaulich**:
 ein Quantenobjekt.

W-T-Dualität
 entwickeln

$$E = hf$$

$$p = h/\lambda$$



Wo ist das Elektron?
Im Zustand ψ !



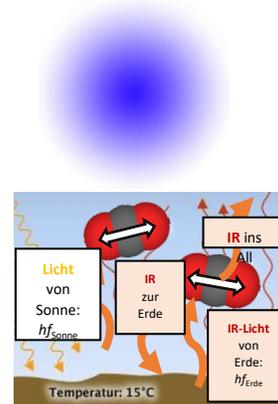
Einstieg in die QM

Q.objekte verhalten
 sich **nicht deterministisch**.

Zustandsbegriff
 entwickeln

$$\lambda_{dB} = h/p$$

$$w(x) = \psi(x)^2$$



Wie ist die
 Quantenwelt?
*Unbestimmt und
 verschränkt!*

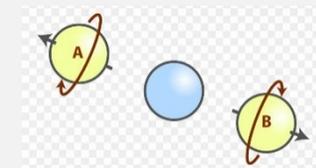
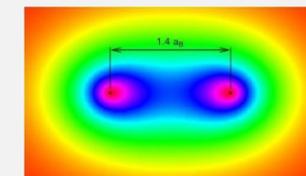


Q.objekte zeigen
 sich nicht **scharf** &
nicht lokal

Zustandsbegriff
 nutzen

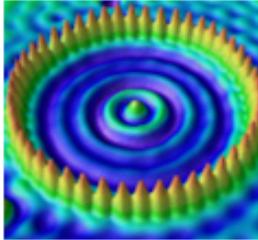
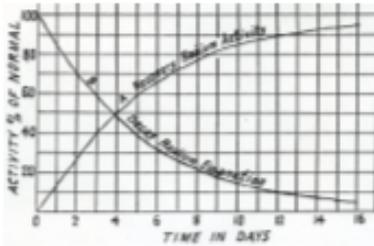
$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h/4\pi$$

Pauli-Prinzip,
 Verschränkung ...



ELEMENTE - Modul 3: «Wie ist die Quantenwelt?»

Inhaltsverzeichnis I: *Anknüpfen – Erweitern des Begriffs «Zustand»*

Menschen		Ideen	Veranschaulichung
 <p>ALBERT EINSTEIN</p>	 <p>HEISENBERG & BOHR = «KOPENHAGEN»</p>	<p>Welle-Teilchen-Dualität und Komplementarität. Die Mathematik ist klar. Wie können Quantenobjekte begrifflich erfasst werden?</p>	
 <p>FRIEDR. HUND</p>	 <p>GEORGE GAMOW</p>	<p>Tunneleffekt Hund leitet den Tunneleffekt ab. Gamow wendet ihn beim Alpha-Zerfall an. Der Tunneleffekt ist in der Technik wichtig, z. B. RTM.</p>	
 <p>E. RUTHERFORD</p>	 <p>LISE MEITNER</p>	<p>4 Schwankungen zeigen den Zufall an. Klassischer Zufall entsteht durch Komplexität. <u>Quantenphysikal.</u> Zufall ist fundamental.</p>	

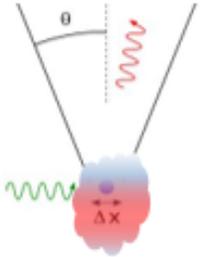
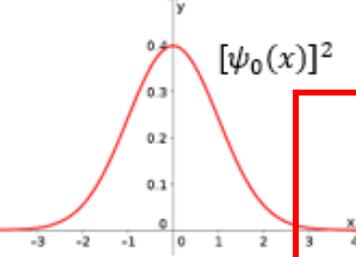
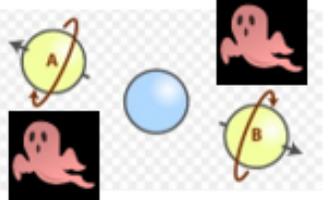
An Bekanntem anknüpfen.
Schwankung = Standardabweichung
ins Spiel bringen.

Wellenaspekt beim Tunneleffekt
vertiefen.

Radioaktiver Zerfall:
Schwankungen zeigen das Wirken
des Quanten-Zufalls.

ELEMENTE - Modul 3: «Wie ist die Quantenwelt?»

Inhaltsverzeichnis II: *Präzisierung und Vertiefung des Begriffs «Zustand»*

 <p>W. HEISENBERG</p>	 <p>WOLFG. PAULI</p>	<p>5 Heisenbergs Unbestimmtheitsrelationen sind quantitative Ergänzung von Bohrs Komplementarität. Die Realität ist unbestimmt.</p>	
 <p>E. SCHRÖDINGER</p>	 <p>MAX BORN</p>	<p>6 Schrödingers Wellengleichung erlaubt die Berechnung der Wellenfunktion, die Born als <u>Wahrscheinlichkeitsdichte</u> erkennt.</p>	
 <p>JOHN BELL</p>	 <p>ALAIN ASPECT</p>	<p>7 Verschränkung ist die Präzisierung des Wellenaspekts. Quantenobjekte, die einmal in Wechselwirkung standen, bleiben es in beliebiger Distanz.</p>	

Ort und Impuls sind nicht beliebig genau messbar / nicht bestimmt:
Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation

Die Wellen-/Zustandsfunktion gehorcht Schrödingergleichung => harmon. Oszillator

Jenseits der Welle-Teilchen-Dualität:
Spin und Ununterscheidbarkeit
=> *Quantenstatistik => chem. Bindung*

Einstein & Podolsky & Rosen 1935
John Bell 1964
Alain Aspect usw. Gegenwart

mehr als 40 Seiten ...

Modul 3: «Wie ist die Quantenwelt?»

Beispiele für fachübergreifende **Zusammenarbeit mit Mathematik**

$(\Delta E)^2 = (\Delta[\text{Lichtquantendichte}] \cdot \text{Energie pro Quant})^2 + (\Delta[\text{Lichtwellendichte}] \cdot \text{Energie pro Welle})^2$
Das ist die physikalische Basis des «Sowohl-als-auch von Teilchen- und Wellenaspekt» beim Licht!

Einstein interessierte sich auch für die Quantenphysik der Materie und fand 1924 Dichteschwankungen $(\Delta M)^2$ in einem verdünnten Gas aus Quantenobjekten mit Ruhemasse und fand wieder zwei Terme: den vertrauten **Teilchenterm** ohne h , und einen für Materie neuartigen **Wellenterm** mit h .

3.1.2 Präzisierung des Begriffs «Schwankung» = Standardabweichung

Was ist hier mit «Schwankung» genau gemeint? – Weil in der Quantenphysik der Zufall eine zentrale

Wir vermuten, dass das $\psi(x)$ mit der Standardabweichung b um den Mittelpunkt schwanken könnte und die Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x) = \psi^2$ eine Gauss'sche Verteilungsfunktion sei:

Die Verteilung $w(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$ (*) hat die Eigenschaft, dass sie integriert $1 = 100\%$ liefert.

Zu dieser Verteilung gehört gemäss $w(x) = \psi^2$ die Zustandsfunktion: $\psi(x) = C \cdot e^{-\frac{x^2}{4b^2}} = T(x)$ (**)

Wir müssen nun überprüfen, ob unsere vermutete Funktion, die wir als Testfunktion $T(x)$ bezeichnen, die Schrödinger-Gleichung (K1.5) erfüllt.

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \cdot \psi''(x) + \frac{1}{2} kx^2 \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x) \quad (***)$$

Start der Überprüfung mit der Kettenregel: $T'(x) = \frac{-1}{4b^2} \cdot 2x \cdot C e^{-\frac{x^2}{4b^2}} = \frac{-1}{2b^2} \cdot x \cdot T(x)$

Fortsetzung mit der Produktregel: $T''(x) = \frac{-1}{2b^2} \cdot T(x) + \frac{1}{4b^4} \cdot x^2 \cdot T(x)$

Einsetzen in (***) gibt: $-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \cdot \left[\frac{-1}{2b^2} \cdot T(x) + \frac{1}{4b^4} \cdot x^2 \cdot T(x) \right] + \frac{1}{2} kx^2 \cdot T(x) = E \cdot T(x)$

(3) «typische Gruppe»: Anna = (6;5), Beat = (5;3), Christine = (4;4) => $\langle x \rangle = 5$, $\langle y \rangle = 4$, $\Delta x = \Delta y = \sqrt{2/3}$

$$r_{xy} = \frac{(6-5) \cdot (5-4) + (5-5) \cdot (3-4) + (4-5) \cdot (4-4)}{3 \cdot \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{2/3}} = +0.5$$

Ein typisches Verhalten liefert eine Korrelation zwischen den Extremen -1 und $+1$; hier ist $r = 0.5$.

Schwankung = Standardabweichung

Auch als Vorbereitung der
Unbestimmtheitsrelation

Die Wellen-/Zustandsfunktion gehorcht
der Schrödingergleichung.

Differentialgleichung

Beispiel 1: 1-dim. Potentialtopf

Beispiel 2: harmon. Oszillator

Beispiel 3: 1s-Zustand H-Atom

Korrelation als Vorbereitung für Bell

Modul 3: Zur Einführung der Schrödinger-Gleichung

Für alle n gilt: $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle (x - 0)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$.

$\langle (\Delta x)^2 \rangle$ ist demnach das mit der entsprechenden Zustandsfunktion gewichtete Mittel von x^2 .

Die sehr anspruchsvolle Aufgabe führt auf ein Integral, das wir mit dem Integralrechner (z. B. auf www.integralrechner.de) lösen!

$$\langle (\Delta x_1)^2 \rangle = \frac{2}{b} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) \right]^2 dx = \frac{(\pi^2 - 6)b^2}{24\pi^2}$$

Allgemein gilt wieder: $\langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle = \langle (p - 0)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle$.

In jedem stationären Zustand gilt nun:

$$\langle E \rangle = \langle p^2/2m \rangle \quad \text{und damit} \quad \langle p^2 \rangle = 2mE$$

Betrachten wir den Grundzustand $\psi_1(x)$ mit $E_1 = \frac{\hbar^2}{8mb^2}$, erhalten wir

$$\langle p_1^2 \rangle = 2mE_1 = 2m \frac{\hbar^2}{8mb^2} = \frac{\hbar^2}{4b^2} = (\Delta p_1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Impulsschwankung: } \Delta p_1 = \frac{\hbar}{2b} \quad (*)$$

Wir dürfen davon ausgehen, dass auch $\langle p^2 \rangle$ sich als gewichtetes Mittel berechnen lässt. Das ist dank Schrödingers «ächter Genialität» – so Einstein – möglich. Schrödinger fand folgen «Übersetzung» vom klassischen Impuls zum quantenmechanischen Impulsoperator:

$$\langle E \rangle = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle \Rightarrow \hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{d^2}{dx^2} \Leftrightarrow \hat{p} = i \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d}{dx}$$

Beachten Sie das Minus-Zeichen, Plancks Konstante und die doppelte Ableitung nach dem Ort x !

\hat{p}^2 und \hat{p} sind keine Faktoren, sondern **Operatoren**.

Die physikalische Grundidee der Schrödingergleichung geht auf den Energiesatz zurück:

$$E_{kin} + E_{pot} = \frac{p^2}{2m} + E_{pot} = E_{tot} \Rightarrow \frac{p^2}{2m} \cdot \psi(x) + E_{pot} \cdot \psi(x) = E_{tot} \cdot \psi(x)$$

Unbekannt in dieser Gleichung ist die Funktion $\psi(x)$. Sie kann erst bestimmt werden, wenn durch den «ächt genialen» [Einstein in einem Brief an Schrödinger] Gedanken aus dieser algebraischen Gleichung eine **Differentialgleichung** gemacht wird. Dabei tauchen Ableitungen auf. Auch Plancks Konstante \hbar , die Grundlage der Quantenphysik, muss ins Spiel kommen.

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{«übersetzt» Schrödinger in} \quad -\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^2 \cdot 2. \text{Ableitung} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \cdot 2. \text{Ableitung}$$

Diese «Übersetzungen» sind neu, «ächt genial». Es gibt keine Herleitung der Schrödinger-Gleichung aus Gesetzmässigkeiten der klassischen Mechanik.

- 1) Testen der UBR beim Potentialtopf mit gewichtetem Mittel = Erwartungswert für x mit ψ (Sinusfunktion).

Aber «physikalisch» für p , nämlich via $E = p^2/2m$!

- 2) Vorbereitung für Schrödinger: «Berechnung sollte auch 'direkt' gehen.»
- 3) Die «Übersetzung» findet Einstein «ächt genial».
- 4) Sie bestätigt das vorher mit $E = p^2/2m$ berechnete Ergebnis.
- 5) Über das i sehen wir hinweg!?!

Die Energiebilanz multipliziert mit ψ inkl. «Übersetzung»...

... liefert die eindimensionale, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung ohne Spin.

Modul 3: «Wie ist die Quantenwelt?»

Beispiele für fachübergreifende Zusammenarbeit mit Chemie

Es brauchte viel Neues in der Physik, bis sie in die Lage kam, die empirische gewonnen Gesetze der Chemie auf eine allgemeine Basis zu stellen: Wieso gibt es einerseits die stark reagierenden Metalle Li, Na, K, Rb, Cs und andererseits die nicht reagierenden Gase He, Ne, Ar, Kr, Xe? Vom inerten Helium führt nur ein Elektron mehr zum reaktiven Lithium, das in Akkus gefährliche Brände auslösen kann! Wie kann man die «Oktett-Regel» (8 Elektronen im energetisch gleichen Zustand, in der gleichen «Schale», sind besonders stabil.) von Gilbert Lewis und Irvin Langmuir ableiten?



Quantenphysik mit **Pauli-Prinzip** als Grundlage für das Periodensystem

2 Elektronen sind ununterscheidbar!

Quantenstatistik als Basis für Supraleitung & für das Pauli-Prinzip und die Antisymmetrie der Zustandsfunktion der Fermionen

- 2 Elektronen im He-Atom &
- 2 Elektronen im H₂-Molekül

(3) Die Fermi-Dirac-Statistik für Quantenobjekte mit halbem Spin ⇔ individualistische Fermionen
Auf welche Arten kann man 2 ununterscheidbare Quantenobjekte an 3 Orten unterbringen, wenn sie vom «individualistischen Typus» sind, sich also **nicht im gleichen Zustand** vertragen? Wir veranschaulichen solche Quantenobjekte durch 2 nicht unterscheidbare, **identische** Mitspielplätze F1 und F2, in einem bestimmten Spiel mitzuspielen.

Anna		F1	F1					Grundzustand	2 individualist. Quantenobj.
Beat	F1		F2					1. angeregter Zustand	F = Platz im Spiel
Chris	F2	F2						2. angeregter Zustand	2 Stück zum Verteilen 🎱🎱

$$\Psi_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_A(\mathbf{r}_1)\Psi_B(\mathbf{r}_2) + \Psi_A(\mathbf{r}_2)\Psi_B(\mathbf{r}_1))$$

Die Berechnung verläuft nach dem Prinzip, das in 3.5.2 durchgeführt ist. Sie führt nach sehr vielen Umformungen zum sogenannten Coulomb-Integral C und dem sogenannten **Austauschintegral X**:

$$C = \iiint d^3r_A \iiint d^3r_B \cdot \varphi_A(r_{1A})\varphi_B(r_{2B}) \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_{1A}} - \frac{e^2}{r_{2A}} - \frac{e^2}{r_{1B}} - \frac{e^2}{r_{2B}} \right] \varphi_A(r_{1A})\varphi_B(r_{2B})$$

$$X = \iiint d^3r_A \iiint d^3r_B \cdot \varphi_A(r_{1A})\varphi_B(r_{2B}) \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{e^2}{R} + \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{r_{1A}} - \frac{e^2}{r_{2A}} - \frac{e^2}{r_{1B}} - \frac{e^2}{r_{2B}} \right] \varphi_A(r_{2A})\varphi_B(r_{1B})$$

Nach der klassischen Physik gäbe es nur das Coulomb-Integral mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $w = [\varphi_A(r_{1A})\varphi_B(r_{2B})]^2$. Das Integral X mit den teilweise vertauschten Elektronen in den Orbitalen A und B gäbe es klassisch nicht! Es ist eine Konsequenz der Ununterscheidbarkeit.

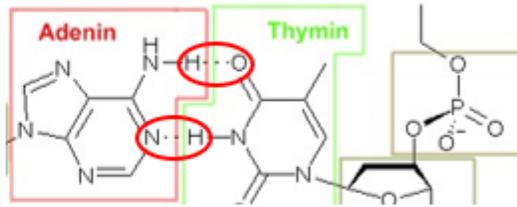
ψ mit räumlicher & mit Spin-Komponente Singulett ⇔ räuml. Komponente symmetrisch

«Austausch»integral X sorgt für die Stabilität
C = Coulomb-Integral-klassisch
X = Coulomb-Integral-quantenmechanisch

Modul 3: «Wie ist die Quantenwelt?»

Beispiele für fachübergreifende Zusammenarbeit mit Biologie

Im Mesokosmos verursacht der Tunneleffekt *spontane Mutationen* in der Erbsubstanz DNA. Die Figur zeigt, wie Adenin und Thymin durch zwei Wasserstoff-Brücken-Bindungen zusammengehalten werden. Die Protonen der Bindungen können mit geringer Wahrscheinlichkeit wegtunneln und dadurch die Erbsubstanz verändern. Meistens wird eine solche Mutation durch Reparaturmechanismen wieder rückgängig gemacht. Das Ergebnis ist gleich wie bei Mutationen, die durch Strahlung oder chemische Reaktionen hervorgerufen werden. Die Mutation kann aber auch stabil werden und sich für das betroffene Individuum schädigend oder – in seltenen Fällen – positiv auswirken.



TUNNELNDE PROTONEN IN DER DNA

Tunneleffekt

als mögliche Ursache für Gendefekt

Die Geschichte des MRI (magnetic resonance imaging) beginnt mit dem jungen Isidor Rabi, der 1927 aus den USA nach Zürich kommt, um bei Schrödinger Quantenphysik zu studieren. Nach Umwegen stösst er auf die magnetische Wirkung des Wasserstoffs. Zurück an der Columbia-University untersucht er die magnetischen Momente von Atomkernen, die auch quantisiert sind. In einem äusseren Magnetfeld richtet sich das Proton parallel oder antiparallel aus, was mit einer Energieänderung ΔE verbunden ist: je stärker das Magnetfeld, umso grösser ΔE . Im modernen MRI benötigt man einen so starken Magneten, dass er mit supraleitenden Drähten betrieben werden muss. Das Prinzip des MRI, das wir in der Einleitung zu Modul 1 skizziert haben, basiert auf dem der NMR (nuclear magnetic resonance), die Rabi im Physiklabor entdeckt hat. Im Detail ist es aber kompliziert:



Geschichte der MRI

als Einstieg in die Erklärung der Funktionsweise

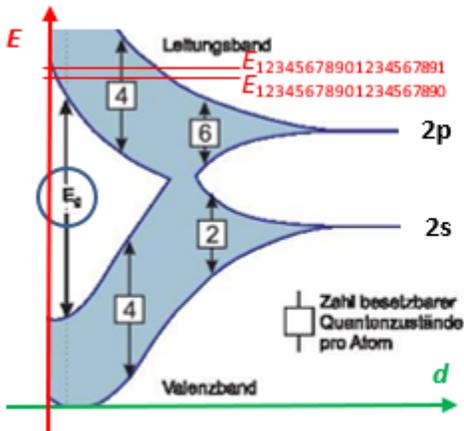
MINT-Modul II: «Anwendungen der Quantenphysik»

Beispiel für *Technikorientierung*

II.6.2 Die Bänderstruktur der Elektronen-Energien

1928 erschien die selbstverständlich in Göttingen erarbeitete Dissertation von Felix Bloch *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*. Mit der neuen Quantenmechanik wurde vieles klar. Auch der Kristall ist aus Atomen aufgebaut, Diamant beispielsweise aus C-Atomen mit 2 Elektronen im 1s-Zustand und je 2 Elektronen im 2s- und im 2p-Zustand. Der Atomrumpf, also Kern und die Elektronen im 1s-Zustand sind uninteressant. Man macht Quantenphysik mit den 4 Valenzelektronen. Ihre Orbitale ψ_{Kristall} sind nicht nur über ein Atom, sondern über den ganzen Kristall ausgedehnt, also Millimeter gross. Im Energieniveauschema unten ist qualitativ und sehr vereinfacht dargestellt, was mit den 2s- und 2p-Zuständen der Einzelatome geschieht, wenn sich diese immer näher kommen (Abstand d) und zu einem Kristall zusammenfinden.

Nach links nimmt die Distanz d zwischen den Atomen ab. Aus einzelnen scharfen Niveaus für 2 plus 2 Elektronen vereinzelter C-Atome werden breite **Bänder**, innerhalb derer für viele Elektronen eine grosse Zahl von Niveaus existiert. Die Zahl entspricht der Anzahl Atome im Kristall, ist also von der Grössenordnung 10^{20} . Der Zustand $E_{12345678901234567890}$ liegt demnach sehr nahe beim Zustand $E_{12345678901234567891}$. Innerhalb der Bänder liegen die Niveaus praktisch dicht, so dass die Elektronen sehr leicht zwischen diesen Zuständen wechseln können. Die thermische Energie genügt. Zwischen den Bändern gibt es die **Bandlücke** (engl. bandgap). Die Positionen von Valenz- und Leitungsband hängen von der Atomsorte ab. Die als «Breite der Bandlücke» bezeichnete Energie E_g entscheidet darüber, ob der Kristall ein Isolator, ein Metall oder ein Halbleiter ist.



Bänderstruktur in Kristallen bestimmt:

Metall

Halbleiter

Isolator

Übergang vom Einzelatom-Niveau
zur Bänderstruktur des Kristalls

MINT-Modul III: «Mehr Quantenmechanik»

Beispiel für *Forschungsorientierung*

Aus einem Zustand φ_3 des elektromagnetischen Feldes mit 3 Photonen und einem Zustand φ_4 mit 4 Photonen entsteht eine Überlagerung, ein Katzenzustand:

$$\varphi_{\text{Katzenzustand}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varphi_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varphi_4$$

Die nicht abschirmbaren Einflüsse der Umgebung sorgen innerhalb von knappen $10 \mu\text{s}$ für einen Zerfall dieses *photonischen Katzenzustands*. Dieser Zerfallsprozess, die sog. Dekohärenz, kann zeitlich verfolgt werden. Das alles ist nur mit schneller Elektronik möglich, und nur weil man so nahe am absoluten Nullpunkt arbeitet, so dass die nach Plancks Gesetz unvermeidliche Wärmestrahlung aller unvermeidlichen Wände nur wenig stört.

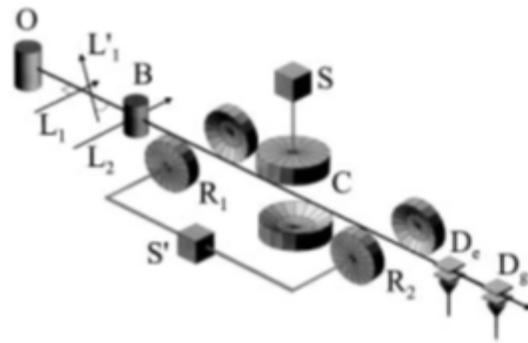


FIG. 2. Sketch of the experimental setup.

In der Abbildung links aus der Arbeit *Observing the Progressive Decoherence of the «Meter» in a Quantum Measurement* von Brune, Hagley, Dreyer, Maïtre, Maali, Wunderlich, Raimond und Haroche (*Physical Review Letters*, December 1996, S. 4887-4890) ist als Figur 2 das Experiment etwas genauer und zugleich abstrakter dargestellt:

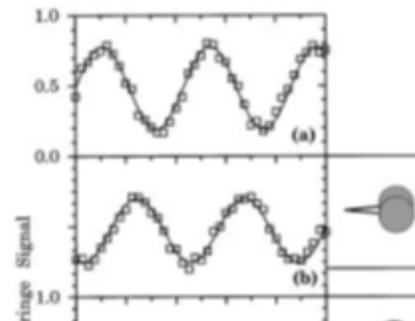
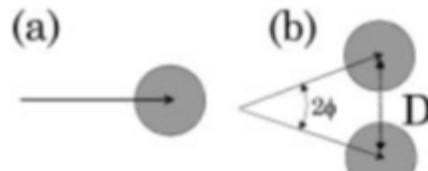
In der Figur unten rechts sind die Messwerte aus einem früheren Experiment dargestellt. Figur (a) ist bei einem leeren Resonator C gemessen worden; bei (d) sind es 9.5 Photonen.

Experiment von Haroche et al.

mit **einzelnen** Quantenobjekten

≠ «Ensemble-Interpretation»

Zusätzlich sind zwei Scheiben in verschiedenen Positionen abgebildet. Ihre Bedeutung wird in Figur 1 dargestellt.



WO IST WAS ZU FINDEN?

ELEMENTE

FACETTEN

MINT

E1 & E2 und zusätzlich E3

F1 & F2 und zusätzlich F3 und F4

MI, MII und MIII

dazu die AKTIVITÄTEN F1 & F2 und zusätzlich F3



- E3.12-E3.15 radioaktiver Zerfall / Zufall
- E3.16-E3.19 Unbestimmtheitsrelation / Abschätzungen zum Atom
- E3.20-E3.24 Schrödinger-Gleichung / harmonischer Oszillator quantitativ / CO₂-Schwingungen
- E3.31-E3.38 Quantenstatistik / Spin / Austauschintegral / H₂-Molekül / Heitler-London
- F3.31-F3.35 Nichtlokal / Verschränkung
- MII.12-MII.16 Festkörper / Halbleiter
- MIII.11-MIII.13 Haroche und MIII.16-MIII.17 Heisenbergs Matrizenmechanik
- Quantencomputer: D: Science on Stage;
USA: <https://www.aapt.org/K12/Quantum-Information-and-Quantum-Computing-Materials.cfm>



Meine Idee:

Es gibt noch viel mehr Quantenphysik,
die an Maturitätsschulen
lehr- und lernbar (und wichtig) ist.



Ihre

***Gedanken, Erfahrungen, Fragen zu
anspruchsvollerer Quantenphysik am Gymnasium***



QR-Code zur Online-Umfrage

