



PHYSIK-INSTITUT DER UNIVERSITÄT ZÜRICH

Mathematische Methoden der Physik II

FRÜHLINGSSEMESTER 2019

Prof. Philippe Jetzer

LaTeX: Marion Baumgartner und Rebekka Bieri

Korrekturen: Andreas Schärer, Simone Balmelli, Cédric Huwyler, Adrian Boëtier

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionentheorie	1
1.1 Komplexe Zahlen	1
1.1.1 Polardarstellung	2
1.1.2 n -te Einheitswurzeln	4
1.2 Begriff der analytischen Funktionen	4
1.3 Konforme Abbildungen	10
1.4 Polynome und rationale Funktionen	13
1.5 Potenzreihen von Exponentialfunktionen	14
1.6 Möbiustransformation	19
1.7 Kurvenintegrale	22
1.7.1 Der Logarithmus in \mathbb{C}	27
1.8 Fundamentale Sätze über holomorphe Funktionen	29
1.9 Die Nullstelle einer Holomorphen Funktion	33
1.10 Der Cauchy'sche Integralsatz	36
1.11 Isolierte Singularitäten	40
1.11.1 Klassifikation der Singularitäten	42
1.12 Der Residuensatz	43
1.12.1 Berechnung der Residuen	44
1.12.2 Hauptwerte	48
2 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen (2.Ordnung) im Komplexen, Hypergeometrische Funktionen	49
2.1 Konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen	53
2.1.1 Konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen	53
3 Darstellungstheorie	56
3.1 Gruppen	56
3.1.1 Grundbegriffe	56
3.1.2 Beispiele	56
3.1.3 Begriffe	59

3.2	Darstellung von Gruppen	61
3.2.1	Unitäre Darstellungen	63
3.3	Darstellungstheorie von endlichen Gruppen	64
3.3.1	Orthogonalitätsrelationen der Matrixelemente	64
3.3.2	Orthogonalitätsrelationen der Charakteren	66
3.3.3	Zerlegung der regulären Darstellungen	67
3.3.4	Charaktertafel einer endlichen Gruppe	67
3.3.5	Kanonische Zerlegung einer Darstellung	70
3.3.6	Die Projektionsformel	70
3.3.7	Eigenwertprobleme mit Symmetrie	72
3.4	Kontinuierliche Gruppen und ihre Darstellungen	79
3.4.1	Die Gruppe aller Drehungen eines Kreises	79
3.4.2	Die Gruppe aller Drehungen einer Kugelfläche	83
3.4.3	Die Campell-Baker-Hausdorff Formel (CBH)	88
3.4.4	Darstellungen von Lie-Gruppen	89
4	Laplace-Transformation	91
5	Tensor Analysis	100
5.1	Tensoren	101
A	Literatur zur Vorlesung MMP II	104

Allfällige Bemerkungen und Fehler bitte an boitier@physik.uzh.ch melden.

1 Funktionentheorie

1.1 Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

i ist eine **imaginäre Einheit** so dass $i^2 = -1$

Komplexe Zahlen werden addiert und multipliziert als wären sie reelle Polynome mit der Variablen i :

$$\begin{aligned}(i^2 &= -1) \\ x + iy &= u + iv \Leftrightarrow x = u, \quad y = v \\ (x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v) \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= (xu - yv) + i(xv + yu)\end{aligned}$$

Folglich ist \mathbb{C} ein **Körper**, mit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Betrachtet man den \mathbb{R} -Vektorraum, so gilt $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow z = x + iy$$

ist ein Isomorphismus; insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\vec{z}_1 + \vec{z}_2 &\rightarrow z_1 + z_2, \\ \lambda \vec{z} &\rightarrow \lambda z \quad (\lambda \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Die Menge \mathbb{C} ist die **Gauss'sche Zahlenebene**.

Es sei $z = x + iy$, dann ist:

$$\left. \begin{array}{l} \Re(z) := x \quad \text{Realteil von } z \\ \Im(z) := y \quad \text{Imaginärteil von } z \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

$\bar{z} := x - iy$ komplex Konjugierte von z .

$z \rightarrow \bar{z} : (x, y) \rightarrow (x, -y)$ ist eine **Spiegelung** an der reellen Achse

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0 \forall z$ und nur für $z = 0$ gilt Gleichheit.

$|z| := \sqrt{z\bar{z}}$ ist der **absolute Betrag** von z

$|a - b|$ ist der Abstand der Punkte a und b in der Gaußschen Ebene

$|a + b| \leq |a| + |b|$ **Dreiecksungleichung**

$$|ab|^2 = ab\bar{a}\bar{b} = a\bar{a}b\bar{b} = |a|^2|b|^2 \Rightarrow |ab| = |a||b|$$

Die Menge $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist die **abgeschlossene komplexe Ebene** und wird die **Riemann'sche Zahlenkugel** genannt. " ∞ " bedeutet hier "punkt-unendlich". Wir betrachten nun folgende Abbildungen

$$\begin{aligned} z &\rightarrow z + a \quad (a \in \mathbb{C} \text{ fest}), \\ z &\rightarrow az \quad (a \in \mathbb{C}^* \text{ fest wobei } \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}), \\ z &\rightarrow \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind bijektive und bistetige Abbildungen $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$.

1.1.1 Polardarstellung

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Umgerechnet gilt:

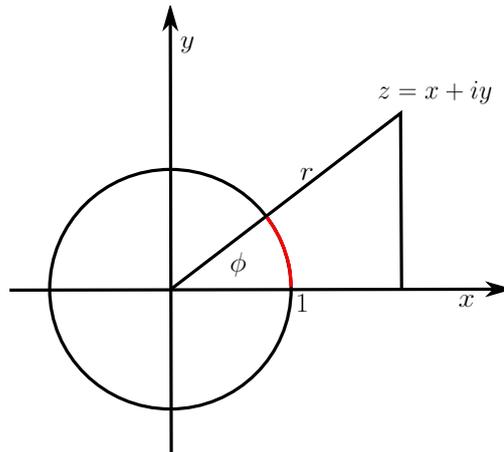
$$r = |z|, \quad \varphi = \arctan \frac{x}{y} \quad (x > 0)$$

Nun ist φ durch z bis auf Vielfache von 2π bestimmt; genauer existiert eine Funktion

$$\arg: \mathbb{C}^* \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{2\pi}, \quad z \rightarrow \arg z,$$

so dass $\forall z \in \mathbb{C}^*$ gilt:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \wedge r > 0 \Leftrightarrow r = |z| \wedge \varphi \in \arg(z).$$

**Beispiel 1.1.1.**

$$\arg(1) = \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\arg(1 + i) = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ z_2 &= r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Additionstheoreme}$$

- Da gilt dass $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, ist

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\Rightarrow \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (\text{Summe von Klassen})$$

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow z^u = r^u (\cos(u \cdot \varphi) + i \sin(u \cdot \varphi))$$

- Weiter ist $e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$.

Gegeben: $a \in \mathbb{C}^*$. **Gesucht:** $z \in \mathbb{C}^*$ mit $z^n = a$.

Sei nun

$$a = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

so erhalten wir n verschiedene Wurzeln

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right) \right) \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

Die Wurzeln liegen auf einem regulären n -Eck, ein **Spezialfall** ist $a = 1$.

1.1.2 n -te Einheitswurzeln

$$z_k = \left(\cos \left(\frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k}{n} \right) \right) \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

$$\Rightarrow z_k = \omega^k \quad \text{mit } \omega := \left(\cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right)$$

1.2 Begriff der analytischen Funktionen

Es sei $A \subset \mathbb{C}$ und z_0 ein Häufungspunkt von A :

$$f : A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \quad (a \neq \infty) :$$

$$\Leftrightarrow \text{zu jedem } \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(z) - a| < \epsilon \text{ so bald } z \in U_{\delta}(z_0)$$

$$\Leftrightarrow |f(z) - a| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow z_0)$$

$$\Leftrightarrow \Re f(z) \rightarrow \Re a \wedge \Im f(z) \rightarrow \Im a$$

- $f(z) \rightarrow a, g(z) \rightarrow b \quad (z \rightarrow z_0) \Rightarrow f(z) + g(z) \rightarrow a + b$ u.s.w
- $U_{\delta}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$

Ist nun $z_0 \in A$: f **stetig im Punkt** $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

\Rightarrow Regeln über das Rechnen mit stetigen Funktionen sind wie im Reellen.

Definition 1.2.1. $G \subset \mathbb{C}$ ist ein **Gebiet** wenn

1. G *offen* [d.h. $\forall z \in G \exists u_{\epsilon}(z) \subset G$]
2. G *zusammenhängend*

Definition 1.2.2.

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

$$\left(= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right),$$

wobei f (komplex) differenzierbar ist im Punkt z_0 . Es sei $f'(z_0)$ (komplex) die Ableitung von f im Punkt z_0 .

Bemerkung 1.2.1. f differenzierbar in $z_0 \Rightarrow f$ ist stetig in z_0 .

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)(z - z_0)$$

$$\text{mit } \lim_{z \rightarrow z_0} r(z) = 0.$$

Definition 1.2.3. $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heisst **analytische (holomorphe) Funktion**, falls f in jedem Punkt $z_0 \in G$ differenzierbar ist. Weiter muss gelten

$$f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist analytisch} \Rightarrow f' : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist eine stetige Funktion}$$

Beispiel 1.2.1.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \\ \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{(z+h)^3 - z^3}{h} \\ &= \frac{3z^2h + 3zh^2 + h^3}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 3z^2 \quad \forall z \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f eine analytische Funktion auf ganz \mathbb{C} ist und $f'(z) = 3z^2$.

Es gelten folgende Regeln wie im Reellen:

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g'; \\ (\lambda f)' &= \lambda f' \quad (\lambda \in \mathbb{C} \text{ fest}); \\ (f \cdot g)' &= f'g + g'f; \\ \left(\frac{1}{f}\right)' &= -\frac{f'}{f^2}. \end{aligned}$$

Die Kettenregel gilt bei Zusammensetzung von analytischen Funktionen, diese Zusammensetzung muss wiederum eine analytische Funktion bilden. Es gilt

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Beispiel 1.2.2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(c) &= 0, \\ \frac{d}{dz}(cz) &= c, \\ \frac{d}{dz}(z^k) &= kz^{k-1} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+z^2}\right) &= \frac{-2z}{(1+z^2)^2} \quad (z \neq \pm i) \end{aligned}$$

Bemerkung 1.2.2. $f : z \rightarrow \frac{1}{1+z^2}$ ist die Fortsetzung ins Komplexe der Funktion $x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$ mit $(x \in \mathbb{R})$.

Man kann $f : G \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auch als Abbildung betrachten mit

$$\begin{aligned} \vec{f} : G \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 : \\ f : z = x + iy &\rightarrow w = u + iv \\ \vec{f} : \vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ (u = u(x, y); \quad v(x, y)). \end{aligned}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen f' und den partiellen Ableitungen von u und v ?

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy \\ \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + dz) - f(z_0)}{dz} &= f'(z_0) =: \alpha + i\beta \end{aligned}$$

$$\text{oder } \Delta f = f(z_0 + dz) - f(z_0) = f'(z_0)dz + \mathcal{O}(dz) \quad (dz \rightarrow 0) \quad (1.2.1)$$

In erster Näherung ist Δf also komplex proportional zum Zuwachs dz .

$$\begin{aligned} dz \rightarrow dw &= f'(z_0)dz \\ \text{d.h. } dw &= du + idv = (\alpha + i\beta)(dx + idy) \\ &= (\alpha dx - \beta dy) + i(\beta dx + \alpha dy) \end{aligned}$$

oder in vektorieller Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Die vektorielle Form von (1.2.1) ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\vec{z}) \quad (z \rightarrow 0) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rf'(z_0) & -Jf'(z_0) \\ Jf'(z_0) & Rf'(z_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.2.3.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = u_x dx + u_y dy, \text{ etc.}$$

Satz 1.2.1. *Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion genügen der **Cauchy-Riemann'schen DGL***

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$(u_x = v_y; \quad u_y = -v_x).$$

Betrachte nun die Jacobi-Determinante der Funktion \vec{f}

$$\mathfrak{J}_f(z) = |f'(z)|^2$$

wobei $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$
 $(= \alpha + i\beta; \quad \alpha = u_x = v_y, \quad \beta = -u_y = v_x).$

Aus $f(z) = u + iv$ findet man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x = \alpha + i\beta = f'(z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = u_y + iv_y = -\beta + i\alpha = i(\alpha + i\beta) = i \cdot f'(z),$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Folglich muss nun die Cauchy-Riemann'sche DGL in komplexer Form gelten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Wenn u und v in G zweimal stetig differenzierbar sind, d.h.

$$u_{xx} = v_{yx}; \quad u_{yx} = -v_{xx},$$

$$u_{xy} = v_{yy}; \quad u_{yy} = -v_{xy} = -v_{yx},$$

findet man

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

$$\Rightarrow \Delta u = 0, \quad \Delta v = 0,$$

Die Lösungen von $\Delta u = 0$ sind harmonische Funktionen, d.h. Real- und Imaginärteil einer holomorphen (analytischen) Funktion sind ebenfalls harmonische Funktionen.

Beispiel 1.2.3.

$$\begin{aligned}
 f(z) = z^4 &= (x + iy)^4 = x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 \end{cases} \\
 u_x &= 4x^3 - 12xy^2 = v_y \\
 u_y &= -12x^2y + 4y^3 = -v_x
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.2.4.

$$\begin{aligned}
 f(z) = e^z &= e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos y}_u + i \underbrace{e^x \sin y}_v \\
 &\Rightarrow \begin{cases} u_x = e^x \cos y = v_y \\ u_y = -e^x \sin y = -v_x \end{cases}
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.2.5.

$$\begin{aligned}
 f(z) = \bar{z} &= x - iy \\
 &\Rightarrow \begin{cases} u_x = 1 \neq v_y; \\ \text{(oder } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 1; \quad \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} = -1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Funktion nicht komplex differenzierbar

Beispiel 1.2.6.

$$\begin{aligned}
 f(z) = z\bar{z} &= x^2 + y^2 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} f_x = 2x; \quad f_y = 2y \\ \frac{1}{i} f_y = \frac{1}{i} 2y \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen stimmen nur für $x = y = 0$ überein. $f(z)$ ist demzufolge nur im Punkt 0 komplex differenzierbar und somit nicht holomorph (analytisch).

Satz 1.2.2. Voraussetzung:

$$u, v \in C^1(G) \text{ (d.h. stetig partiell differenzierbar)}$$

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \forall z \in G$$

Behauptung 1.2.1.

$$f := u + iv \text{ ist eine analytische Funktion}$$

$$z = x + iy$$

Ohne Beweis

$$z = x + iy, \quad dz = dx + idy \quad d\bar{z} = dx - idy$$

$$dx = \frac{1}{2}(d\bar{z} + dz) \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$$

$f(z) = f(x, y)$, f ist reell differenzierbar an der Stelle z .

$$\Rightarrow f(z + dz) - f(z) = \underbrace{a}_{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underbrace{b}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy + \mathcal{O}(dx^2 + dy^2)$$

Andererseits ist

$$\lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z + dz) - f(z)}{dz} = f'(z) = A \text{ existiert}$$

$$\Rightarrow f(z + dz) - f(z) = Adz + \mathcal{O}(dz^2)$$

$$f(z + dz) - f(z) = a \frac{1}{2}(d\bar{z} + dz) + b \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) + \mathcal{O}(dz^2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(a - ib)}_{\frac{\partial f}{\partial z}} dz + \underbrace{\frac{1}{2}(a + ib)}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} d\bar{z} + \mathcal{O}(dz^2)$$

Definition 1.2.4.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Durch Vergleich findet man, dass $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Aber es gilt auch

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{Cauchy-Riemann DGL!})$$

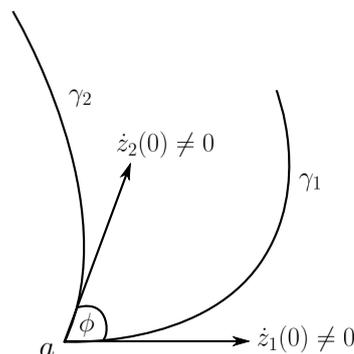
Satz 1.2.3. Eine Funktion f ist genau dann komplex differenzierbar, wenn sie reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann DGL erfüllt ist (d.h. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$)

1.3 Konforme Abbildungen

f ist holomorph (analytisch) in G , $a \in G$, $f'(a) \neq 0$

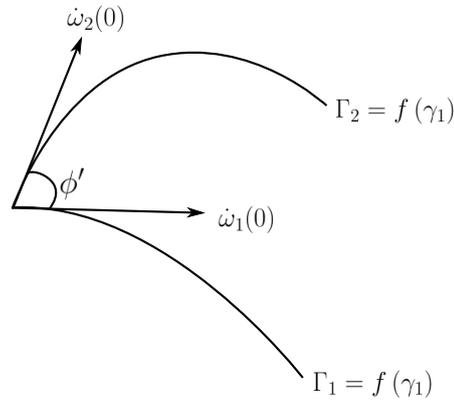
$$\gamma_1 : t \rightarrow \begin{cases} z_1(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ z_1(0) = a \\ z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t) \end{cases}$$

$$\gamma_2 : t \rightarrow \begin{cases} z_2(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ z_2(0) = a \\ z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t) \end{cases}$$



In der ω -Ebene ($\omega = f(z)$):

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \omega_1(t) &= f(z_1(t)) & \dot{\omega}_1(0) &= f'(a)\dot{z}_1(0) \\ \Gamma_2 : \omega_2(t) &= f(z_2(t)) & \dot{\omega}_2(0) &= f'(a)\dot{z}_2(0) \end{aligned}$$



$f'(a)\dot{z}_1(0)$ ist eine Drehstreckung von $\dot{z}_1(0)$ mit komplexer Zahl $f'(a) = a = |a|e^{i\phi_a}$ (d.h. Streckung um $|a|$ und Drehung um ϕ_a). Das Analoge gilt für $f'(a)\dot{z}_2(0)$.

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1(0) &\rightarrow \omega_1(0) \\ \dot{z}_2(0) &\rightarrow \omega_2(0) \end{aligned} \right\} \text{Gleiche Drehstreckung} \Rightarrow \text{die Winkel } \alpha \text{ und } \alpha' \text{ sind gleich}$$

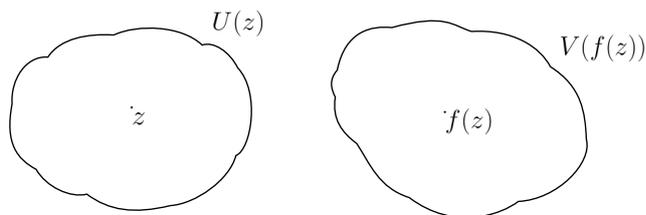
$$\begin{aligned} f(z + dz) - f(a) &\approx f'(a)dz & \omega &= f(z) \\ d\omega &\approx f'(a)dz \end{aligned}$$

Die Abbildung f ist im ‘‘Kleinen’’ eine Drehstreckung, d.h. $\phi = \phi'$: konform (winkeltreu und orientierungstreu). Betrachte

$$\begin{aligned} f &= u + iv, \quad z \rightarrow f(z), \quad z = x + iy \\ (x, y) &\rightarrow (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \neq 0$$



Die Abbildung $f|_u : U \rightarrow V$ ist bijektiv falls die Funktionaldeterminante ungleich Null ist. Somit existiert $f^{-1} : V \rightarrow U$ falls f analytisch (holomorph).

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ -v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |u_x + iv_x|^2 = |f'(z)|^2 \neq 0$$

Satz 1.3.1. Eine holomorphe Funktion liefert in allen Punkten wo ihre Ableitung nicht verschwindet, d.h. $f'(z) \neq 0$, eine lokal umkehrbare und konforme Abbildung. Die lokale Umkehrung ist wieder holomorph. ($f^{-1} = g$)

$$w = f(z), \quad z = f^{-1}(\omega) = g(\omega), \quad g(\omega + d\omega) = z + dz$$

$$\frac{g(\omega + d\omega) - g(\omega)}{d\omega} = \frac{dz}{d\omega} = \frac{dz}{f(z + dz) - f(z)} = \frac{1}{\frac{f(z+dz) - f(z)}{dz}} \rightarrow \frac{1}{f'}$$

(da $f'(z) \neq 0$ nach Voraussetzung)

Beispiel 1.3.1.

$$f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$

(falls $z \neq 0, f'(z) \neq 0$)

man wähle $u := \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$

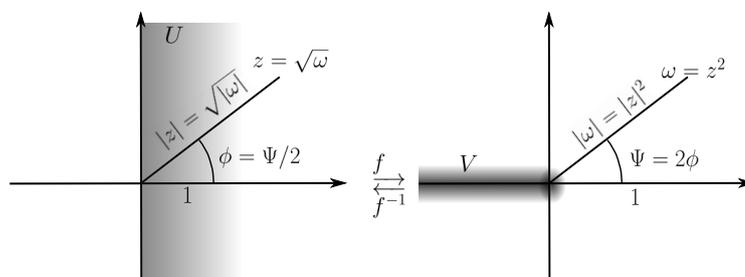
$V : f(U) = \{w \mid w \neq -|u|\}$

$\Rightarrow f(z) = w$ [d.h nicht negativ auf reelle Achse]

$f : z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) \rightarrow w = |z|^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi)$

$f^{-1} : \omega = |\omega|(\cos \phi + i \sin \phi) \rightarrow z = \sqrt{|\omega|}(\cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2})$

$f^{-1}(\omega) = \sqrt{\omega} \quad \frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega} = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} = \frac{1}{2z} = \frac{1}{f'(z)}$



1.4 Polynome und rationale Funktionen

Definition 1.4.1.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad a_k \in \mathbb{C}$$

ist ein **Polynom** vom Grad $\leq n$

$$\deg(p) := \max\{k \mid a_k \neq 0\}$$

ist der **Grad** des Polynoms p . p ist auf ganz \mathbb{C} analytisch denn

$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + 2 a_2 z + a_1$$

$$\text{Zerlegung: } p(z) = a_n (z - \alpha)(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n) \quad \alpha_n \in \mathbb{C}$$

$p(z)$ kann immer so zerlegt werden.

Definition 1.4.2. α ist eine **Nullstelle der Ordnung r**

$$\Rightarrow p(z) = (z - \alpha)^r \underbrace{q(z)}_{\text{Polynom mit } q(\alpha) \neq 0}$$

Satz 1.4.1. Liegen alle Nullstellen von p in einer Halbebene H , so liegen auch alle Nullstellen von p' in H . (z.B. obere Halbebene definiert durch $\text{Im}(z) > 0$)

Definition 1.4.3. Betrachte die Funktion $R(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$, p und q seien Polynome ohne gemeinsame Nullstellen: R ist eine **rationale Funktion**.

$R(z)$ sei analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{z \mid q(z) = 0\}$. $R(z)$ lässt sich in eindeutiger Weise in **Partialbrüche** zerlegen:

$$R(z) = \sum_{j=1}^m H_j \left(\frac{1}{z - \alpha_j} \right) + b(z),$$

b ist ein Polynom, α_j ($1 \leq j \leq m$) sind die verschiedenen Nullstellen von q .

$$H_j \left(\frac{1}{z - \alpha_j} \right) := \frac{A_{jr}}{(z - \alpha_j)^r} + \dots + \frac{A_{j1}}{(z - \alpha_j)}$$

ist der zu α_j gehörige **Hauptteil** von R .

Definition 1.4.4. R besitzt im Punkt $\alpha \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} \text{eine Nullstelle} \\ \text{einen Pol} \end{cases}$ der Ordnung $k \geq 1$

$$R(z) = \begin{cases} (z - \alpha)^k R_1(z) \\ \frac{1}{(z - \alpha)^k} R_1(z), \quad R_1(\alpha) \in \mathbb{C}^* \quad (d.h. \neq 0) \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{C}$ Pol der Ordnung $\geq 1 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \alpha} R(z) = \infty \Rightarrow R(\alpha) := \infty$

$z \rightarrow \infty$:

$$R(Z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots}{b_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots} \quad a_n, b_m \leq 0$$

$$= z^{n-m} \frac{(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots)}{(b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \dots)} \xrightarrow{(z \rightarrow \infty)} \begin{cases} 0 & (n < m) \\ \frac{a_n}{b_m} \in \mathbb{C}^* & (n = m) \\ \infty & (n > m) \end{cases}$$

Definition 1.4.5.

$\begin{cases} n < m \\ n > m \end{cases} : R$ besitzt bei ∞ $\begin{cases} \text{eine Nullstelle} \\ \text{einen Pol} \end{cases}$ der Ordnung $|n - m|$

\Rightarrow Eine rationale Funktion R kann als Abbildung $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ aufgefasst werden.

1.5 Potenzreihen von Exponentialfunktionen

Bezeichnungen:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\} =: D_r(z_0)$$

$$D_r(0) =: D_r$$

$$D_1 =: D \quad (\text{Einheitskreisscheibe ohne Rand})$$

$$\bar{D} := \{z \mid |z| \leq 1\} \quad \text{analog zu } \bar{D}_r$$

$$\partial D := \begin{cases} \text{Randmenge von } D; \text{ analog zu } \partial \bar{D}_r \\ \text{Zyklus } t \rightarrow \cos t + i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}$$

Definition 1.5.1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C} : \text{Potenzreihen mit Mittelpunkt } z_0$$

Beispiel 1.5.1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + \dots = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ stellt eine in D analytische Funktionen f dar; dabei ist allerdings f über D hinaus auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ analytisch fortsetzbar.

Wie im reellen beweist man: zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k =: \Sigma$ gibt es eine wohl bestimmte Zahl ρ , $0 \leq \rho \leq \infty$, derart dass

1. Σ für $|z| > \rho$ divergiert
2. Σ für $|z| < \rho$ absolut konvergent (d.h. wenn die zugehörige Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k|$ der absoluten Beträge konvergiert.
3. Σ auf jedem $\overline{D_r}$, $r < \rho$, gleichmässig konvergiert.

ρ ist der **Konvergenzradius** von Σ und lässt sich über die Formel von **Hadamard** wie folgt bestimmen

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{|a_k|})},$$

wobei “sup” die Häufungspunkte der Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$ sind.

Oder wenn folgender Limes existiert:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Gliedweise differenzierbare Reihe:

$$\begin{aligned} \Sigma' &:= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(k a_k)}_{=b_k} \cdot z^k \quad (z \neq 0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Sigma'$ konvergiert gleichmässig auf jedem $\overline{D_r}$, $r < \rho$

$\Rightarrow \Sigma'$ stellt in D_ρ die (komplexe) Ableitung der Funktion $f := \Sigma$ dar.

Satz 1.5.1. Jede Potenzreihe Σ stellt im Inneren des Konvergenzkreises eine analytische Funktion f dar.

Satz 1.5.2. Σ lässt sich in D_ρ beliebig oft gliedweise differenzieren ($\Rightarrow f \in C^\infty$) insbesondere ist

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

Satz 1.5.3. Σ ist die Taylor-Reihe von f , d.h es ist

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Korollar 1.5.1. (Prinzip des Koeffizientenvergleiches)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 0 \text{ in } D_\rho \Leftrightarrow \forall a_k = 0$$

$$f(z) = 0 \Rightarrow \forall f^{(k)}(z) = 0 \underset{\text{Satz 1.5.3}}{\Rightarrow} \forall a_k = 0$$

Exponentialfunktion:

Definition 1.5.2.

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty) \Rightarrow \rho = \infty,$$

folglich ist \exp analytisch in \mathbb{C} .

$$\exp'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \exp z \Rightarrow \text{DGL } \exp' = \exp$$

Satz 1.5.4.

$$\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{C}$$

Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (ohne Beweis)

Es gilt also $\exp(1) =: e$, folglich definiert man $e^z := \exp(z)$ ($z \in \mathbb{C}$ da alle $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k > 0$ ($\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, d.h $a_k = \frac{1}{k!}$))

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{\bar{z}} &= \overline{e^z} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \\ e^x &> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R} &\Rightarrow |e^{it}|^2 = e^{it} \overline{e^{it}} = e^{it} e^{-it} = e^0 = 1 \\ &\Rightarrow |e^{it}| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ |e^z| &= |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x \\ \cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \\ \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \\ &\Rightarrow \cos z + i \sin z = e^{iz}; \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \end{aligned}$$

unter Verwendung von $\sin' z = \cos z$ und den Additionstheoremen.

Weitere Eigenschaften

$$\left. \begin{aligned} e^{it} &= 1 \Leftrightarrow t = 2\pi k \\ e^{it} &= e^{it'} \Leftrightarrow t - t' = 2\pi k \\ e^z &= 1 \Leftrightarrow z = 2\pi ki \\ e^z &= e^{z'} \Leftrightarrow z - z' = 2k\pi i \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{Z}$$

exp besitzt die Fundamentalperiode $2\pi i$; cos und sin besitzen die Fundamentalperiode 2π .

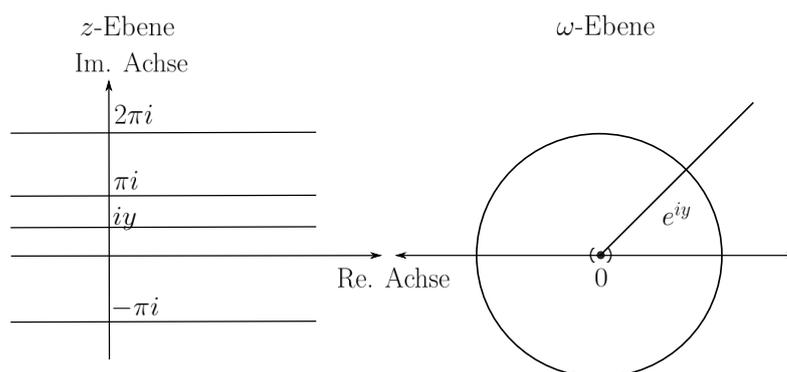
$$\begin{aligned} \cos ix &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x \quad x \in \mathbb{R} \\ \sin ix &= \frac{-1}{2i}(e^x - e^{-x}) = i \sinh x \\ e^{i\frac{\pi}{2}} &= i; \quad e^{i\pi} = -1; \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i; \quad e^{i2\pi} = 1 \end{aligned}$$

d.h. $\text{cis} : \mathbb{R} \Rightarrow \partial D, t \rightarrow e^{it} = \cos t + i \sin t$

Abbildung durch die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} z &\rightarrow w = e^z \\ z = x + iy; \quad |e^z| &= |w| = e^x; \quad x = \ln|w| \\ \arg(w) &= \arg(e^z) = y \end{aligned}$$

da $e^{z+2\pi ik} = e^z$ ergibt sich folgendes Bild



Die horizontalen Geraden werden auf den Strahlen auf den Null-Punkt ($x \rightarrow -\infty$) (jedoch ohne den Null Punkt) abgebildet. Die imaginäre Achse geht auf den Einheitskreis über, wobei dieser alle 2π wieder durchlaufen wird. Parallelen zur i -Achse gehen in konzentrische Kreise über. "Kartesisches Netz" \Rightarrow "Polarnetz"

Der Logarithmus (im Komplexen)

$e^z = w \quad z = \log(w)$: sind gleichbedeutend

$$|e^z| = |w| = e^x \quad x = \ln|w|$$

$$y = \arg(w) = \arg(e^z)$$

$$\log(w) = \ln|w| + i\arg(w)$$

$$(z = x + iy)$$

1. $\log(w)$ ist nur bis auf ganzes Vielfaches von $2\pi i$ definiert
2. $\log 1 = 2\pi ik \in \mathbb{Z}$
3. $\log(-e) = 1 + (\pi + 2\pi k)i$

Definition 1.5.3. Eine Funktion f heisst in einem Gebiet Ω ein (stetiger) Zweig des Logarithmus wenn f in Ω stetig ist und $e^{f(z)} = z$.

Behauptung 1.5.1. Jeder Zweig des Logarithmus ist holomorph und die Ableitung ist $\frac{1}{z}$.

Beweis.

$$w = f(z), \quad \tilde{w} = f(\tilde{z}), \quad e^{f(z)} = z, \quad e^w = z$$

$$\frac{f(\tilde{z}) - f(z)}{\tilde{z} - z} = \frac{\tilde{w} - w}{e^{\tilde{w}} - e^w} = \frac{1}{\frac{e^{\tilde{w}} - e^w}{\tilde{w} - w}} \xrightarrow{\tilde{w} \rightarrow w} \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

□

1.6 Möbiustransformation

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

komplexe (2×2) Matrix, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

Definition 1.6.1. *Möbiustransformation, (gebroschene) lineare Transformation:*

$$\text{Abb. } S: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \quad z \rightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

$$\left[z: \infty \rightarrow \frac{\alpha}{\gamma}, \quad z: \frac{-\delta}{\gamma} \rightarrow \infty; \quad \infty \rightarrow \infty \text{ falls } \gamma = 0 \right]$$

M ist die Menge aller Möbiustransformationen.

Bemerkung 1.6.1. Die Matrix $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} =: [S]$ ist durch S nur bis auf einen Faktor $\lambda \in \mathbb{C}^*$ bestimmt. Falls notwendig kann angenommen werden, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist.

Satz 1.6.1. Voraussetzung: $S \in M$

Behauptung 1.6.1. S lässt sich zusammensetzen aus

1. Translation $z \rightarrow z + \nu$, $\nu \in \mathbb{C}$
2. Drehstreckung $z \rightarrow \mu z$, $\mu \in \mathbb{C}^*$
3. Inversion $z \rightarrow \frac{1}{z}$

Behauptung 1.6.2. S ist eine bijektive, bistetige, konforme und kreistreue Abb. von $\overline{\mathbb{C}}$ auf sich selbst.

Behauptung 1.6.3.

$$S^{-1}(z') = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha} \quad (\Rightarrow S^{-1} \in M).$$

(ohne Beweis)

Satz 1.6.2. Gegeben seien drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$.

Behauptung 1.6.4. Es existiert genau ein $T \in M$ mit $T(z_1) = \infty$, $T(z_2) = 0$, $T(z_3) = 1$.

Beweis. 1. **Existenz**

- $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$

Der folgende Ansatz genügt:

$$T(z) = \lambda \frac{z - z_2}{z - z_1} \Rightarrow T(z) := \frac{z - z_2}{z - z_1} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

- $z_1 = \infty$: $T(z) := \frac{z - z_2}{z_3 - z_2}$ ($T(z_1) = \infty$)
- $z_2 = \infty$: $T(z) := \frac{z_3 - z_1}{z - z_1}$ ($T(z_2) = 0$)
- $z_3 = \infty$: $T(z) := \frac{z - z_2}{z - z_1}$ ($T(z_3) = 1$)

2. Eindeutigkeit

Seien T_1, T_2 zwei solche Transformationen, so gilt $S := T_2 \circ T_1^{-1}$ und $S : (\infty, 0, 1) \rightarrow (\infty, 0, 1)$, $S \in M \Rightarrow S(z) = z$, das heisst $S = \mathbb{1} \Rightarrow T_2 = T_1$.

□

Beispiel 1.6.1. *Gesucht ist $s \in M$ mit $S : (-i, 1, i) \rightarrow (-1, 0, 1)$*

Die Lösung kann dann durch folgenden Ansatz gefunden werden: $S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

Die Koeffizienten werden durch das Einsetzen von Punkten berechnet:

$$S(-i) = -1 = \frac{\alpha(-i) + \beta}{\gamma(-i) + \delta}$$

und so weiter. Dies ergibt dann

$$S(z) = -i \frac{z - 1}{z + 1}.$$

S bildet somit D (den Einheitskreis ohne Rand) auf die obere Halbebene ab (∂D auf \mathbb{R} und -1 auf ∞)

Die Möbiustransformationen werden nach der Anzahl der Fixpunkte klassifiziert

Behauptung 1.6.5.

Voraussetzung: $S \in M, S \neq 1$

S besitzt entweder einen oder zwei Fixpunkte und $\gamma \neq 0 \Rightarrow \infty$ ist kein Fixpunkt.

$$z \in \mathbb{C} \text{ ist Fixpunkt} \Leftrightarrow \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = z$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(\alpha - \delta) \pm \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma} = \frac{(\alpha - \delta) \pm \sqrt{\Delta}}{2\gamma}$$

daraus ergibt sich

$$\Delta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \begin{cases} = 0 \Rightarrow \text{ein Fixpunkt } a \in \mathbb{C}, \\ \neq 0 \Rightarrow \text{zwei Fixpunkte } a, b \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Falls $\gamma = 0$ ergibt sich

$$\Delta \begin{cases} = 0 \Rightarrow \text{ein Fixpunkt: } \infty, \\ \neq 0 \Rightarrow \text{zwei Fixpunkte: } a \in \mathbb{C} \text{ und } \infty. \end{cases}$$

(Dieser Fall wird nicht weiter diskutiert.)

Anstelle von z führen wir die neue Koordinatenvariable ω ein. Dabei sollten die Fixpunkte a (und b) die neuen Koordinaten *infty* (und 0) erhalten. Somit setzen wir

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{z - a} \text{ (ein Fixpunkt) bzw. } \omega := \frac{z - b}{z - a} \text{ (zwei Fixpunkte)}$$

$\Rightarrow S$ ist auch bezüglich der neuen Koordinate eine Möbiustransformation.

Ein Fixpunkt

(parabolischer Fall)

$\tilde{\omega} = \infty$ ist Fixpunkt und hat somit die Gestalt

$$S : \tilde{\omega} \rightarrow \mu \tilde{\omega} + \nu \Rightarrow \mu = 1$$

(sonst gäbe es einen weiteren Fixpunkt). Es folgt also dass

$$S : \tilde{\omega} \rightarrow \tilde{\omega} + \nu$$

($\nu \neq 0$, sonst wäre $S = 1$). Setze $\tilde{\omega} := \nu \omega$, dann $S : \nu \omega \rightarrow \nu \omega + \nu$, d.h. $S : \omega \rightarrow \omega + 1$ (Normalform eines parabolischen S).

Zwei Fixpunkte

$\omega = 0$ und $\omega = \infty$ sind Fixpunkte, woraus eine neue Gestalt von S folgt:

$$S : \omega \rightarrow \lambda \omega \quad \text{Normalform eines nicht parabolischen } S \ (\lambda \neq \infty, 0, 1).$$

Spezialfälle:

$\lambda \in \mathbb{R}^+ : S$ hyperbolisch (“Streckung”)

$|\lambda| = 1 : S$ elliptisch (“Drehung”)

Die qualitativen Eigenschaften von S sind vollständig bestimmt durch den Wert von λ .
Man kann zeigen dass gilt:

$$\lambda = \frac{\alpha + \delta - \sqrt{\Delta}}{\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}}.$$

1.7 Kurvenintegrale

Bemerkung 1.7.1. *Kurvenintegrale (oder Linienintegrale) sind das wichtigste Werkzeug der Funktionentheorie. Dazu benötigt man eine “gute” Definition der “Linie” entlang welcher integriert wird, sowie eine Beschreibung der zulässigen Integrale.*

Definition 1.7.1.

$\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \rightarrow z(t); \quad C^1 : \mathbf{Bogen (Weg)}$

$z'(t) \neq 0 \forall t$ **glatter Bogen**

$a(\gamma) := z(t_0) : \text{Anfangspunkt von } \gamma.$

$b(\gamma) := z(t_1) : \text{Endpunkt von } \gamma$

Zwei Parametrisierungen $z(t), \xi(t)$ sind äquivalent falls eine streng monoton wachsende Funktion τ existiert, so dass $\xi(\tau(t)) = z(t) \forall t$.

Definition 1.7.2.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (f(z) dx + i f(z) dy) = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) \\ &\quad (f(z) = u(z) + iv(z)) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \dot{z}(t) dt \\ &\quad \textbf{Integral von } \omega = f(z) dz \textbf{ längs } \gamma \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (u(t) + iv(t)) dt \\ &\quad [f(z(t))\dot{z}(t) = u(t) + iv(t)] \end{aligned}$$

Das Integral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.

$$\begin{aligned} t = t(\tau); \quad \xi(\tau) = z(t(\tau)) \quad t_0 \rightarrow \tau_0, \quad t_1 \rightarrow \tau_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \dot{z}(t) dt &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(z(t(\tau))) \dot{z}(t(\tau)) t'(\tau) d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\xi(\tau)) \dot{\xi}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Beispiel 1.7.1.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dz \quad a = z(t_0), \quad b = z(t_1) \quad (f(z) = 1) \\ \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \dot{z}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\dot{u}(t)}_{du} dt + i \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\dot{v}(t)}_{dv} dt \\ = u(t)|_{t_0}^{t_1} + iv|_{t_0}^{t_1} = z(t_1) - z(t_0) = -a + b = b - a \end{aligned}$$

Beispiel 1.7.2.

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z}$$

$$z = re^{i\phi} \quad z' = ire^{i\phi} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\phi} d\phi}{re^{i\phi}} = 2\pi i = \oint \frac{dz}{z}$$

unabhängig von r (um den Nullpunkt).

Beispiel 1.7.3. Ganz allgemein gilt

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

$$(z(\phi) = a + re^{i\phi} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi),$$

sowie für $n \neq -1$

$$\int_{\gamma_r} (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (z(\phi)-a)^n z'(\phi) d\phi = \frac{(z(\phi)-a)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{n+1} (r^{n+1} - r^{n+1}) = 0 \quad \text{unabhängig von } r.$$

$$z'(\psi) = rie^{i\psi}$$

Beispiel 1.7.4.

$$\int_{\gamma} |dz| = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{z}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt = \text{Länge von } \gamma$$

Eigenschaften

1. $\int_{\gamma} (f+g) dz = \int_{\gamma} f dz + \int_{\gamma} g dz$
2. $\int_{\gamma} c \cdot f dz = c \int_{\gamma} f dz$ falls c eine Konstante
3. $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$
4. $\int_{-\gamma} f dz = - \int_{\gamma} f dz$
5. $\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$

Folgerungen

1. Sei $|f(z)| \leq M$ für z längs γ , so gilt $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \int_{\gamma} |dz| = M$ mit der Länge γ .
2. $\{f_n\}$ mit $f_n(z) \rightarrow f(z)$ gleichmässig längs γ , so gilt $\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz$.

Definition 1.7.3. Sei f stetig im Gebiet Ω , F heisst **Stammfunktion** (oder *Integralfunktion*) von f in Ω , wenn $F' = f$ in Ω .

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\dot{z}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} dF(z(t)) \\ &= F(z(t_1)) - F(z(t_0)) \\ &= F(b) - F(a) \quad [a = z(t_0), b = z(t_1)] \end{aligned}$$

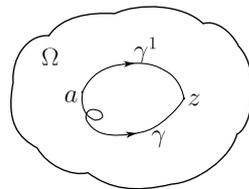
Satz 1.7.1. Es sei f stetig in Ω , f hat in Ω dann und nur dann eine Integralfunktion, wenn $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg in Ω .

Beweis. 1. $f = F'$, γ geschlossen

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(b) - F(a) = 0 \quad \text{da } a = b$$

2. $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ für alle γ geschlossen. Definiere nun

$$F(z) = \int_a^z f(\xi)d\xi \tag{1.7.1}$$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{-\gamma^1} f(z)dz &= \int_{\underbrace{\gamma - \gamma^1}_{\text{geschlossen}}} f(z)dz = 0 \\ \text{andererseits } \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)dz &= - \int_{-\gamma^1} f dz = \int_{\gamma^1} f(z)dz \end{aligned}$$

folglich ist die Gleichung (1.7.1) unabhängig vom Weg a nach z . F ist komplex differenzierbar. Somit gilt

$$\lim_{z \rightarrow z'} \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} \stackrel{?}{=} f(z)$$

Betrachte $F(z') - F(z) = \underbrace{\int_z^{z'} f(\xi) d\xi}_{\text{unabhängige vom Weg}}$

$$\lim_{z \rightarrow z'} \left| \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - f(z) \right| = \lim_{z \rightarrow z'} \left| \frac{\int_z^{z'} (f(\xi) - f(z)) d\xi}{z - z'} \right|$$

(da $f(z)$ bez. ξ eine konstante ist d.h. $\int_z^{z'} f(z) d\xi = f(z) \int_z^{z'} d\xi = f(z)(z' - z)$)

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z'} \left| \frac{\int_z^{z'} (f(\xi) - f(z)) d\xi}{z - z'} \right| \leq \lim_{z \rightarrow z'} \frac{\epsilon |z' - z|}{|z' - z|}$$

und mit $|f(\xi) - f(z)| < \epsilon$ (f ist stetig) (wenn $|z' - \xi| < \delta$) erhalten wir

$$\leq \lim_{z \rightarrow z'} \epsilon \rightarrow 0.$$

es gilt also $F'(z) = f(z)$.

□

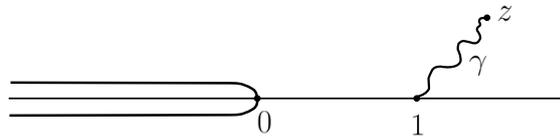
Beispiel 1.7.5.

$$\int z^n dz \quad n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$$

(Der 0 Punkt sei **nicht** auf γ ; falls $n < -1$)

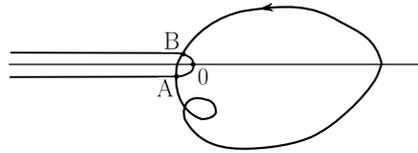
- Stammfunktion: $\frac{z^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \int_{\gamma} z^n dz = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$
- Falls γ geschlossen: $\int_{\gamma} z^n dz = 0$.

Beispiel 1.7.6. $f(z) = \frac{1}{z}$ (d.h. $n = -1$). Die Stammfunktion ist $\log z = \ln |z| + i \arg z$



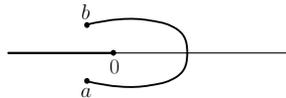
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \log z - \log 1 = \ln z$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{re^{i\pi}=A}^{re^{i\pi}=B} = \underbrace{\log re^{i\pi} - \log re^{i\pi}}_{\ln r + i\pi - (\ln r - i\pi) = 2\pi i}$$



Bei einmaligem Umlauf ergibt dies $2\pi i$. Es folgt also dass $f = \frac{1}{z}$ keine analytische Stammfunktion in $\hat{\mathbb{C}} (= \mathbb{C} \setminus \{0\})$ besitzt.

Betrachtet man aber ein Gebiet wie zum Beispiel $\mathbb{C}^- = \{z | z \neq -|z|\}$ (d.h. ohne negative reelle Achse) dann existiert die Stammfunktion:



$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \log b - \log a \quad \forall a, b \in \mathbb{C}^-$$

1.7.1 Der Logarithmus in \mathbb{C}

Im Reellen ist der Logarithmus eindeutig definiert als die Umkehrabbildung der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+, & \exp(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \ln : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{so dass} & \exp(\ln(x)) = x \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Wenn man die Exponentialfunktion ins Komplexe fortsetzt mit der Definition:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

so verliert man die Induktivität, da die Exponentialfunktion $2\pi i$ -periodisch ist und deshalb kein eindeutiger Logarithmus existiert.

Trotzdem kann man nach stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, ($\Omega \subset \mathbb{C}$, ein Gebiet) suchen, die $\exp(f(z)) = z$ erfüllen; solche Funktionen nennt man Logarithmusfunktionen für das Gebiet Ω .

Wählt man $\Omega = \mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{r \in \mathbb{R} | r \leq 0\}$, so kann ein $z \in \mathbb{C}^-$ geschrieben werden als $z = |z|e^{i \arg(z)}$ mit einer eindeutigen Phase $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$. Dann definiert

$$\log : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}, \log(z) := \ln(|z|) + i \arg(z)$$

eine Logarithmusfunktion für Ω , da $e^{\log(z)} = e^{\ln(|z|)}e^{i \arg(z)} = |z|e^{i \arg(z)} = z$ gilt. Die Menge der Logarithmusfunktionen auf \mathbb{C}^- ist:

$$\log_k(z) = \log(z) + 2\pi i k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

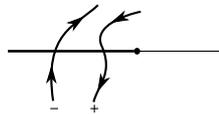
Man nennt sie die Zweige des Logarithmus für \mathbb{C}^- und \log selber wird Hauptteil (Hauptzweig) genannt.

Umlaufzahl eines Zyklus

γ ist ein Zyklus (geschlossener Weg) $a \notin \gamma$.

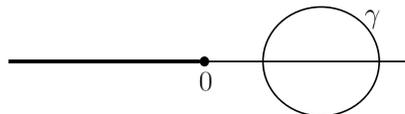
Definition 1.7.4. $N(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ *Umlaufzahl von γ um a*

N_{\pm} ist die Anzahl der positiven/negativen Überkreuzungen der negativen reellen Achse (bis a). Dann ist $N(\gamma, a) = N_+ - N_-$,



da $\arg z(t)$ bei jeder positiven Überkreuzung um -2π springt, bei jeder negativen Überkreuzung um $+2\pi$.

Bemerkung 1.7.2. Falls γ a nicht "enthält", dann ist $N = 0$ (z.B. $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 0$).



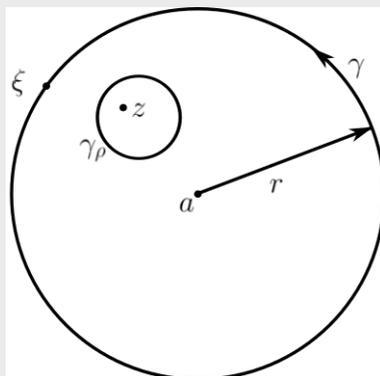
1.8 Fundamentale Sätze über holomorphe Funktionen

Die Cauchy-Integralformel im Fall des Kreises

Voraussetzung: f sei holomorph in Ω : $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$

Behauptung 1.8.1.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad \xi \in \gamma$$



z liege im Inneren des Kreises mit Radius r .

Definition 1.8.1. $\frac{1}{\xi - z} =: k(z, \xi)$ **Cauchy'scher Kern.**

(Falls der Zyklus γ den Punkt a mehrmals umkreist, genau N mal, so erhält man $N \cdot f(z)$, statt nur $f(z)$.)

Beweis.

$$\begin{aligned} \gamma : \theta &\rightarrow re^{i\theta} && (\text{wir setzen } a = 0, \text{ sonst Translation}) \\ \gamma_{\rho} : \theta &\rightarrow z + \rho(re^{i\theta} - z) && 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \gamma &= \gamma_{\rho=1} : \theta \rightarrow re^{i\theta} && 0 < \rho \leq 1 \\ \gamma &= \gamma_1 \text{ dann: } \xi = z + (re^{i\theta} - z)\rho && (\rho = 1 \text{ dann auf } \gamma = \gamma_1) \end{aligned}$$

$$\mathfrak{J}(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho(re^{i\theta} - z))}{\rho(re^{i\theta} - z)} \rho re^{i\theta} i d\theta$$

Betrachte:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{J}(\rho)}{d\rho} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(z + \rho(re^{i\theta} - z))}{(re^{i\theta} - z)^2} (re^{i\theta} - z)^2 re^{i\theta} i d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f'(\omega) \frac{d\omega}{\rho} \\ (\omega = z + \rho(re^{i\theta} - z); \quad d\omega = \rho re^{i\theta} i d\theta \rightarrow \frac{d\omega}{\rho} &= re^{i\theta} i d\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} f'(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\rho} \underbrace{\int_{\gamma_\rho} f'(\omega) d\omega}_{=0} \end{aligned}$$

(=0, da die Integralfunktion vorhanden und der Weg geschlossen ist.)

$$\Rightarrow \frac{d\mathfrak{J}(\rho)}{d\rho} = 0 \rightarrow \partial(\rho) = \text{konstant für } 0 < \rho \leq 1$$

Betrachte:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \mathfrak{J}(\rho) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho(re^{i\theta} - z))}{(re^{i\theta} - z)} re^{i\theta} i d\theta = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} i d\theta}{(re^{i\theta} - z)} \\ &= \frac{f(z)}{2\pi i} \underbrace{\int_\gamma \frac{d\rho}{\rho - z}}_{=2\pi i} = f(z) \end{aligned}$$

□

Für die Ableitung der obigen Formel gilt: $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$.

Beweis.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z - h} - \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right) \frac{1}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \left[\left(\frac{1}{\xi - z - h} - \frac{1}{\xi - z} \right) \frac{1}{h} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right] d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \frac{hd\xi}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi i} \max_\gamma |f(\xi)| |h| \times \frac{2\pi r}{(r - |z+h|)(r - |z|)^2} \\ &\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Behauptung 1.8.2. (ohne Beweis) Die Cauchy'sche Integralformel kann unter dem Integral differenziert werden.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \\ f''(z) &= \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)}} d\xi \end{aligned}$$

⇒ Eine holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar.

Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion

Voraussetzung Kreisscheibe $k = \{z \mid |z - a| < r\}$ in Ω f holomorph in Ω .

Satz 1.8.1. Sei f holomorph in einem (offenen) Gebiet^a Ω . Dann ist f in jedem Punkt $a \in \Omega$ in eine Potenzreihe entwickelbar:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{(n+1)}}$$

Die Potenzreihe konvergiert gegen f in jedem Kreis mit Zentrum a der in Ω enthalten ist.

Bemerkung 1.8.1. Da Ω offen ist, gibt es solche Kreise, d.h. zu $a \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\{z \mid |z - a| \leq r\} \subset \Omega$.

^aGebiet := offene zusammenhängend Punktmenge

Satz von Liouville

Definition 1.8.2. Eine Funktion f , holomorph in \mathbb{C} , heisst eine **ganze Funktion**

Beispiel 1.8.1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin z$, $\cos z$ sind ganze Funktionen.

Voraussetzung f sei beschränkt in \mathbb{C} , d.h. $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$.

Satz 1.8.2. Eine beschränkte ganze Funktion ist eine Konstante.

Beweis.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{mit } \rho = \infty$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi^{n+1}}$$

$$\max_{\xi \in \gamma} |f(\xi)| = M, \quad |\xi| = r$$

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\xi)|}{|\xi^{n+1}|} |d\xi| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}$$

aber $r \rightarrow \infty$, somit ist $|c_n| = 0$ für $n = 1, 2, \dots \Rightarrow f(z) = c_0$ konstant. □

Satz von Morera

Voraussetzung f sei stetig in einem Gebiet Ω und $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in Ω

Behauptung 1.8.3. f ist holomorph in Ω und $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist eine **konvergente Folge holomorpher Funktionen**
(Ohne Beweis)

Satz 1.8.3.

1. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist in Ω lokal gleichmässig konvergent, d.h. zu jedem $z \in \Omega$ gibt es eine Kreisscheibe $K(z) \subset \Omega$, auf der $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig konvergent ist.
2. f_n ist holomorph in Ω .

Behauptung 1.8.4.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$ ist holomorph in Ω
- $\{f_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$ ist lokal gleichmässig konvergent in Ω , $k = 1, 2, \dots$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z) \quad \text{ist holomorph in } \Omega$$

(ohne Beweis)

Beispiel 1.8.2. Die Riemann'sche Zeta-Funktion

- s sei reell:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

für $s > 1$ konvergiert die Reihe wie folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \xi(s).$$

- s komplex: $s = \sigma + i \cdot t$; $n^{-s} = e^{-s \ln n}$

$$|n^{-s}| = e^{-\sigma \ln n} = n^{-\sigma}$$

Die Reihe ist absolut konvergent für $\sigma > 1$:

$$\sigma_0 > 1, \quad |n^{-s}| \leq n^{-\sigma_0},$$

für $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ ist eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0$.
 $\xi(s)$ ist holomorph in

$$\operatorname{Re}(s) > 1; \xi'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n^{-s} \ln n)$$

1.9 Die Nullstelle einer Holomorphen Funktion

Definition 1.9.1. a ist eine Nullstelle der Ordnung k , falls zum Beispiel

$$f(z) = (z - a)^k g(z),$$

wobei $g(a) \neq 0$.

Beispiel 1.9.1. $f(z) = \sin z$ hat die Nullstellen $\{0, \pm\pi, \pm 2\pi\}$ der Ordnung 1.

Satz 1.9.1. Voraussetzung: f sei holomorph in Ω .

Behauptung: Entweder $f(z) = 0$ in ganz Ω oder die Nullstellen von f sind in Ω isoliert. Jede Nullstelle von f besitzt also in Ω eine Umgebung, in der sie die einzige Nullstelle ist. (Ohne Beweis)

Das Identitätsprinzip

Voraussetzung: f, g sind holomorph in Ω

$$\begin{cases} f(z_n) = g(z_n) \text{ für } z_n \in \Omega, z_n \rightarrow z_0 \in \Omega \\ z_n \neq z_m, n \neq m \end{cases}$$

Es gilt: $f = g$ (z_0 ist nicht eine isolierte Nullstelle von $f(z_0) - g(z_0) = 0$ also nach obigem Satz ist $f - g = 0$)

Voraussetzung: f, g sind holomorph in Ω , $a \in \Omega$.

$$f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a) \quad n = 0, 1, \dots$$

Behauptung 1.9.1. $f = g$

$f - g = 0$ hat Häufungspunkte: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n = f(z) - g(z)$ alle

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} - \frac{g^{(n)}(a)}{n!} = 0$$

Beispiel 1.9.2.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin(z) \quad z \in \mathbb{C}$$

Beispiel 1.9.3.

$$x \rightarrow e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$e^z, f(z), f(x) = e^x$$

Falls eine Funktion vom Reellen zum Komplexen fortsetzbar ist, in eine holomorphe Funktion, so ist die Fortsetzung eindeutig, da zwei verschiedene Funktionen im Reellen gleich wären. Wegen dem Satz wäre die Differenz gleich Null (identisch), folglich müssen sie gleich sein.

Das Prinzip der analytischen Fortsetzung

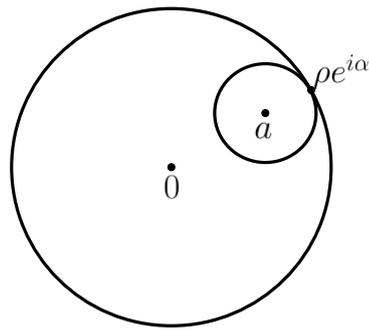
$$\begin{array}{l} f \text{ holomorph in } \Omega \\ f_1 \text{ holomorph in } \Omega_1 \end{array} \left| \begin{array}{l} (f, \Omega) \text{ sei } \Omega \subset \Omega_1 \\ (f_1, \Omega_1) \text{ mit } f_1|_{\Omega} = f \end{array} \right.$$

Definition 1.9.2. f_1 ist eine analytische Fortsetzung von f von Ω nach Ω_1 .

Satz 1.9.2. Diese analytische Fortsetzung ist **eindeutig** bestimmt.

Beweis. Wir nehmen an, dass $(f, \Omega) \rightarrow (f_2, \Omega_1) \Rightarrow f_2 = f_1$, da $f_2 - f_1$ holomorph in Ω , also $f_2 - f_1 = 0$ in Ω . □

Konvergenzkreis und Singularitäten



Betrachte: (Entwicklung um Ursprung 0) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, der Konvergenzradius $\rho > 0$ kann für $f(z)$ auch um den Punkt a entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

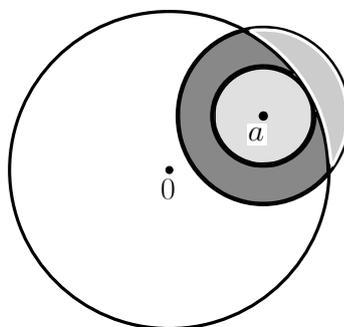
Konvergenzradius: $\rho(a) \geq \rho - |a|$

- $\rho(a) > \rho - |a|$
im Inneren des kleineren Kreises stimmen die Funktionen überein, auch im grossen. f ist holomorph in $\rho e^{i\alpha}$ **fortsetzbar** (d.h. gleich dort holomorph).
- $\rho(a) = \rho - |a|$:
bedeutet, dass man f nicht analytisch fortsetzen kann in $\rho e^{i\alpha}$ (entspricht einer Singularität): ein Hindernis gegenüber analytischer Fortsetzung von f .

Satz 1.9.3. *Mindestens ein Punkt der Peripherie ist eine singuläre Stelle. Der Konvergenzkreis reicht bis zur nächsten Singularität. (Ohne Beweis)*

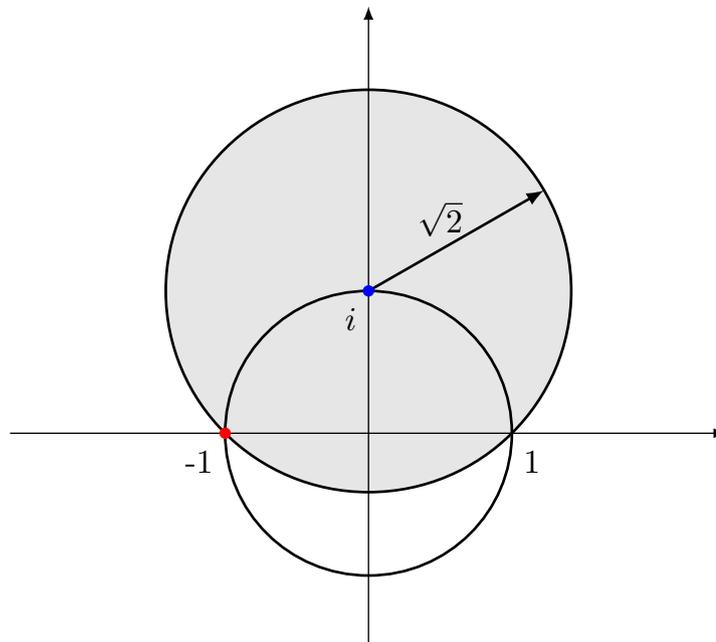
Beispiel 1.9.4.

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$$



-1 ist eine Singularität da $f(-1)$ nicht definiert ist (Pol). Die Funktion ist also nicht holomorph und $\rho = 1$. Wir können aber $f(z)$ auch um den Punkt $z = i$ entwickeln:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+(z-i)} = \frac{1}{(1+i)\left(1+\frac{z-i}{1+i}\right)} \\ &= \frac{1}{1+i} \left[1 - \left(\frac{z-i}{1+i}\right) + \left(\frac{z-i}{1+i}\right)^2 - \dots \right] \\ &= \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n \\ \rho &= |z-i| < |1+i| = \sqrt{2} \end{aligned}$$



1.10 Der Cauchy'sche Integralsatz

f sei holomorph im Gebiet Ω , z.B. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(z-a)^{n+1}}{(n+1)} \quad \text{Integralfunktionen}$$

Wann hat f in Ω eine Integralfunktion? Es existiert eine Integralfunktion dann und nur dann wenn $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in Ω .

Satz 1.10.1. f sei holomorph in Ω , C und C' seien zwei Wege in Ω , die die gleichen Endpunkte (a und b) verbinden oder die beide geschlossen sind. Sind C und C' stetig ineinander deformierbar, innerhalb des Gebietes Ω (bei festhalten der Endpunkte wenn C und C' nicht geschlossen), so gilt

$$\int_{C'} f(z)dz = \int_C f(z)dz$$

Betrachte

$$\int_C + \int_{-C'} = \int_C - \int_{C'} = \int_\gamma$$

γ ist ein geschlossener Weg, es gilt jedoch dass $\int_\gamma f(z)dz = 0$, da f holomorph ist.

Bemerkung 1.10.1. Ist C (ein geschlossener Weg) zusammenziehbar (stetig) auf einen Punkt innerhalb Ω , dann $\int_C f(z)dz = 0$

Korollar 1.10.1. Ist ein geschlossener Weg C innerhalb Ω auf einen Punkt stetig deformierbar, so ist

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Definition 1.10.1. Ein Gebiet Ω heisst **einfach zusammenhängend**, wenn jeder geschlossene Weg darin auf einen Punkt stetig deformierbar ist.

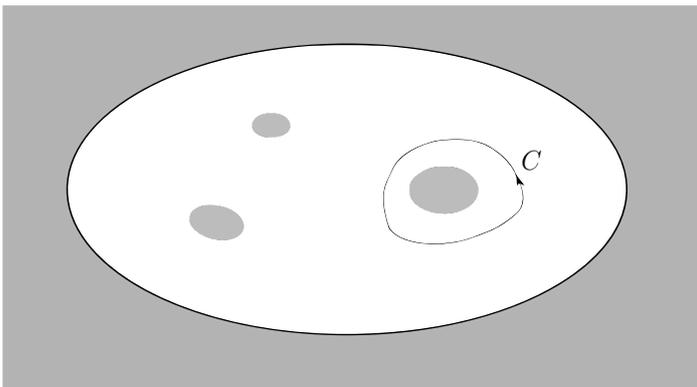
Satz 1.10.2. Ist f in Ω holomorph und ist Ω **einfach zusammenhängend**, so ist $\int_C f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg C in Ω ; d.h. f hat in Ω eine Integralfunktion.

Beispiel 1.10.1. $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \Omega$:

$$\int_\Omega \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

(Ω ist **nicht** einfach zusammenhängend.)

Beispiel 1.10.2. **nicht** einfach zusammenhängend:



Anwendungen: Berechnung von sonst schwierig lösbaren bestimmten Integralen durch Integration im Komplexen.

Beispiel 1.10.3.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Betrachte $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx$:

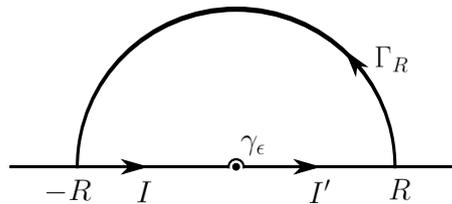
$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \left(\int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \dots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \right) \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

ist eine alternierende Reihe und monoton abnehmend. $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$ mit $a_n \rightarrow 0$. Man kann daraus folgern dass die Reihe konvergiert und somit auch das Integral konvergiert.

Betrachte

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1}{2i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left(\int_\epsilon^R + \int_{-R}^{-\epsilon} \right) \frac{e^{ix}}{x} dx \end{aligned}$$

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ Betrachte z.B. die obere Halbebene,



dann gilt $\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \forall R, \forall \epsilon$ (Gebiet ist einfach zusammenhängend so wie gewählt).

$$\Rightarrow \left(\int_I + \int_{I'} + \int_{\Gamma_R} + \int_{\gamma_\epsilon} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

mit $\epsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$

1.

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz \stackrel{\underbrace{\gamma_\epsilon \Rightarrow \epsilon e^{i\phi} = z}}{=} \int_\pi^0 \frac{e^{iz}}{\epsilon e^{i\phi}} \underbrace{\epsilon e^{i\phi} i d\phi}_{dz} = - \int_0^\pi e^{iz} idz$$

für $\epsilon \rightarrow 0 \quad z \rightarrow 0 \quad e^{iz} \rightarrow 1$

$$\Rightarrow - \int_0^\pi idz = -i\pi$$

2.

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \stackrel{*}{=} \int_0^\pi \frac{e^{iR \cos \phi - R \sin \phi}}{R e^{i\phi}} i R e^{i\phi} d\phi$$

$* = \Gamma_R \rightarrow z = R e^{i\phi} = R(\cos \phi + i \sin \phi)$

$$\Rightarrow \left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \sin \phi} d\phi$$

$\rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$

3.

$$\left(\int_I + \int_{I'} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = \left(\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_\epsilon^R \right) \frac{e^{ix}}{x} dx$$

$$= 2i \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

Zusammengefasst:

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx + 0 + (-i\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Weitere Anwendung: Die Cauchy'sche Integralformel

Voraussetzung: f ist holomorph in Ω , wobei Ω einfach zusammenhängend ist. C ist ein geschlossener Weg in Ω , $z \notin C$.

Behauptung 1.10.1. $N(C, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$

Bemerkung 1.10.2. C ist jetzt ein beliebiger Weg und muss nicht mehr nur ein Kreis sein (wie vorher gezeigt).

Betrachte:

$$\begin{cases} g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \\ g'(\xi) \end{cases} \quad \text{falls } z = \xi$$

g, g' holomorph $\rightarrow \int_C g(\xi) d\xi = 0$

$$0 = \int_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - f(z) \underbrace{\int_C \frac{d\xi}{\xi - z}}_{=2\pi i N(C,z)}$$

Daraus folgt die Behauptung.

1.11 Isolierte Singularitäten

Satz 1.11.1. (Laurent-Reihe) Voraussetzung: f habe in a eine isolierte Singularität, d.h. f ist holomorph in $\dot{K} = \{z \mid 0 < |z - a| < \rho\}$.

Behauptung 1.11.1.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

konvergiert für $0 < |z - a| < \rho$

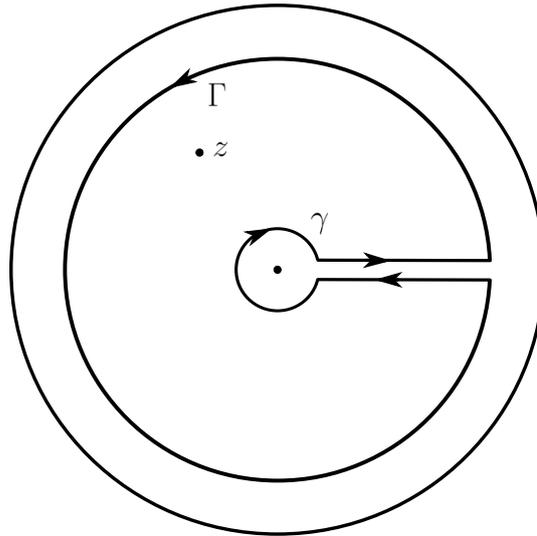
$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n}_{\text{konvergiert für } z \neq a} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n}_{\text{konvergiert für } |z - a| < \rho}$$

Singularer Teil Regulärer Teil $r(z)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Beweis. Satz von Cauchy;

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} + \int_{\gamma} \right) \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \tag{1.11.1}$$



Die Linien, welche den grossen Kreis (Γ) mit dem kleinen (γ) horizontal verbindet hebt sich auf. Γ und γ entsprechen einem Kreis um den Punkt a . Die Kurve kann also als zu einer Umkreisung von z deformiert werden.

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z-a}{\xi-a}\right)} \quad (1.11.2)$$

Für $\xi \in \Gamma$ ist $\left| \frac{z-a}{\xi-a} \right| < 1$; somit gilt für (1.11.2)

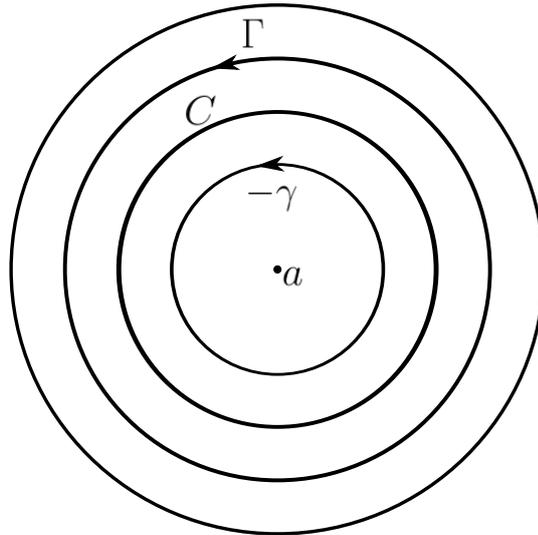
$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \\ \text{für } \xi \in \gamma : \quad \frac{1}{\xi - z} &= - \frac{1}{(z-a) - (\xi-a)} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \\ &\left| \frac{\xi-a}{z-a} \right| < 1 \end{aligned}$$

Durch einsetzen in (1.11.1) und berücksichtigen dass γ negativ orientiert (also gibt es ein negatives Vorzeichen) ergibt sich:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} (z-a)^n + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f(\xi) (\xi-a)^n \frac{d\xi}{(z-a)^{n+1}}$$

Wobei hier nun γ positiv orientiert ist. ($n \rightarrow -n$ in der zweiten Summe; $+\sum_{-n=-1}^{\infty} n +$

$1 \Rightarrow \tilde{n}, n \rightarrow \tilde{n} + 1)$



Wegen des Cauchy Integralsatzes kann über C integriert werden (anstelle von Γ oder $-\gamma$)

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n : \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$$

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow -n, \dots, -1, 0, \dots, n$$

□

1.11.1 Klassifikation der Singularitäten

- $c_n = 0$ für $n = -1, -2, \dots$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < \rho$$

a ist eine **hebbare Singularität**. ($\rightarrow f(a) = c_0$)

- nicht alle c_n sind null (n : negativ) aber nur endlich viele sind nicht null für $n < 0$

$$c_{-k}(z-a)^{-k} + \dots + c_{-1}(z-a)^{-1} + r(z) \quad c_{-k} \neq 0$$

a ist ein **k-facher Pol**.

- unendlich viele $c_n \neq 0$ für $n < 0$ a ist eine **wesentliche Singularität**.

Definition 1.11.1. f ist in G **meromorph**, falls f in G holomorph (analytisch) ist, bis auf isolierte Singularitäten. (z.B rationale Funktionen sind meromorph in \mathbb{C})

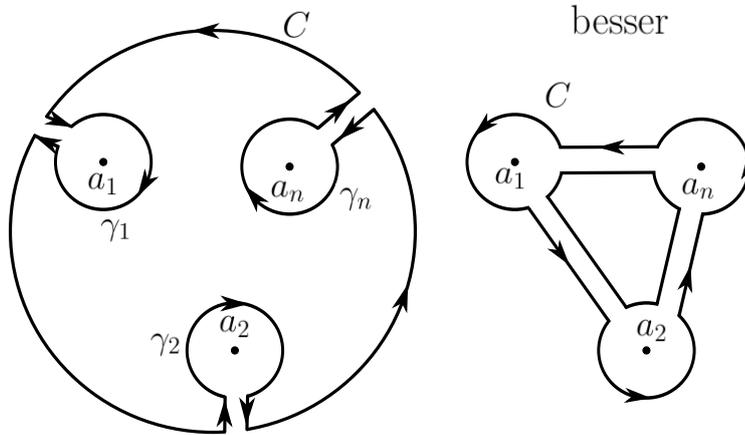
Beispiel 1.11.1.

$$f(z) = e^{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

(*Laurententwicklung*): $z = 0$ ist wesentliche Singularität.

1.12 Der Residuensatz

Sei Ω einfach zusammenhängend und f holomorph in $\Omega \setminus \{a_i\}_{i \in I}$, $I = \{1, \dots, n\}$, wobei a_i isolierte Singularitäten sind. Sei C ein geschlossener Weg in $\Omega \setminus \{a_i\}_{i \in I}$ um die Singularitäten $\{a_j\}_{j \in J}$, $J \subset I$.



Nach dem Cauchy-Integralsatz kann der Weg C so deformiert werden, dass nur noch die Integration über $\gamma_j = \partial B_\epsilon(a_j)$, $\epsilon > 0$ notwendig ist.

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j \in J} \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

Man kann nun die Funktion als Summe von Singulär- und Regulär-Teil schreiben:

$f(z) = s(z) + r(z)$, mit $\int_{\gamma_j} r(z) dz = 0, \forall j \in J$ da r auf dem ganzen Gebiet Ω regulär ist.

$$\Rightarrow \int_{\gamma_j} s(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \int_{\gamma_j} \frac{dz}{(z - a_j)^{-n}} = 2\pi i c_{-1}$$

Für die anderen Werte von n ist eine Integralfunktion vorhanden und folglich ist das Integral Null wenn über eine geschlossene Linie integriert wird.

Definition 1.12.1. Das **Residuum** von f an der Stelle a ist

$$\operatorname{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} s(z) dz$$

$$f(z) = \dots \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Satz 1.12.1. (Residuensatz)

C sei eine Kurve in $\Omega \setminus \{a_i\}_{i \in I}$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j \in J} \operatorname{Res}(f, a_j) N(C, a_j);$$

Es wird hier über alle von C eingeschlossenen Pole a_j summiert. $N(C, a_j)$ ist die Umlaufzahl um den Punkt a_j .

1.12.1 Berechnung der Residuen

1. a sei ein einfacher Pol

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z),$$

zum Beispiel

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Q habe bei a eine einfache Nullstelle (d.h. $Q(a) = 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)P(z)}{Q(z)} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}} \\ &= \frac{P(a)}{Q'(a)} = c_{-1} \end{aligned}$$

2. a ist ein k -facher Pol

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{g(z)}{(z-a)^k} \\
 &= \frac{a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_{k-1}(z-a)^{k-1} + \dots}{(z-a)^k} \\
 &\quad (g(a) \neq 0) \\
 \operatorname{Res}(f, a) &= a_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(a) \\
 \operatorname{Res}(f, a) &= \frac{1}{(k-1)!} [(z-a)^k f(z)]^{(k-1)} \Big|_{z=a}
 \end{aligned}$$

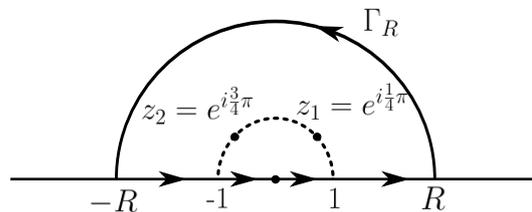
Beispiel 1.12.1.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} \\
 f(z) &= \frac{1}{1+z^4}
 \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $1+z^4=0$ sind (einfache Nullstellen, liegen auf dem Einheitskreis)

$$\begin{aligned}
 z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}; \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}; \quad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} \\
 (0 \leq \phi \leq 2\pi)
 \end{aligned}$$

Betrachte die Kurve C (geschlossene Kurve):



$$\begin{aligned} \left(\int_{-R}^R + \int_{\Gamma_R} \right) \frac{dz}{1+z^4} &= 2\pi i (Res(f, z_1) + Res(f, z_2)) \\ Res(f, z_j) &\stackrel{\text{Regel 1}}{=} \frac{1}{4z_j^3} = \frac{-z_j}{4} \\ (da \ z_j^4 + 1 = 0 \Rightarrow z_j^3 &= \frac{-1}{z_j}) \\ \Rightarrow 2\pi i \left[\frac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{4} + \frac{-e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4} \right] &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} \frac{|dz|}{|1+z^4|} &\leq \int_{\Gamma_R} \frac{|dz|}{R^4-1} = \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow{\text{für } R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Somit für $R \rightarrow \infty$ bleibt nur noch $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ übrig.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Beispiel 1.12.2. $R(\cos t, \sin t) \neq \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$ eine rationale Funktion von 2 Variablen.

Gesucht: $I := \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

I lässt sich als Linienintegral längs $\partial D := z(t) = e^{it} \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ darstellen:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{ie^{it}} R\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) ie^{it} dt \\ &= \frac{1}{i} \int_{\partial D} \underbrace{\frac{1}{z} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2}\right)}_{:= \tilde{R}(z), \text{keine Pole auf } \partial D} dz \\ \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt &= \frac{1}{i} \int_{\partial D} \tilde{R}(z) dz = 2\pi \sum_{a \in D} Res(\tilde{R}, a) \end{aligned}$$

Beispiel 1.12.3.

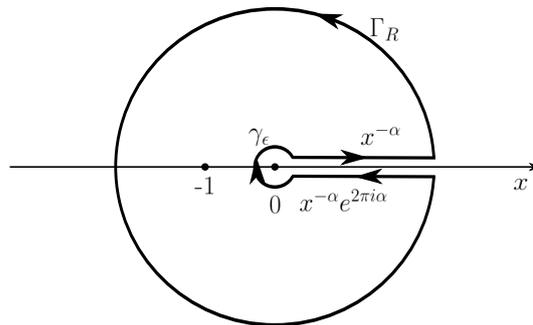
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\lambda + \cos t}, \quad \lambda > 1 \\ \tilde{R}(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{\lambda + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} = \frac{2}{z^2 + 2\lambda z + 1} \\ \text{Pole: } z^2 + 2\lambda z + 1 = 0 &\Rightarrow z_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1} \\ &\Rightarrow z_+ \in D, \quad z_- \notin D. \\ \tilde{R}(z) = \frac{2}{(z - z_+)(z - z_-)} &\Rightarrow Res(\tilde{R}, z_+) = \frac{2}{(z_+ - z_-)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \\ \Rightarrow I &= \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \end{aligned}$$

Beispiel 1.12.4.

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{(1+x)} dx, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$f(z) = \frac{z^{-\alpha}}{1+z} \quad z^{-\alpha} = e^{-\alpha \log z}$$

Pol in $z = -1$, betrachte folgende geschlossene Kurve C :



$$\left(\begin{array}{l} \log z \rightarrow \log |z| + i \arg z \\ \text{oben } \arg = 0 \\ \text{unten } \arg = 2\pi \end{array} \right)$$

Somit:

$$\int_C \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz = \int_\epsilon^R \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz + \int_R^\epsilon \frac{e^{-2\pi i \alpha} x^{-\alpha}}{1+x} dx + \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz$$

$(\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty)$

$$\left. \begin{array}{l} z = \epsilon e^{i\phi} \\ dz = \epsilon i e^{i\phi} \\ z^{-\alpha} = \epsilon^{-\alpha} e^{-i\alpha\phi} \end{array} \right\} z^{-\alpha} dz \text{ prop. } \epsilon^{1-\alpha} \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0, (\alpha < 1)$$

$$\int_{\Gamma_R} \rightarrow \left. \begin{array}{l} z = R e^{i\phi} \\ dz = R i e^{i\phi} d\phi \\ z^{-\alpha} = R^{-\alpha} e^{-i\alpha\phi} \end{array} \right\} \int_{\Gamma_R} \frac{R^{1-\alpha}}{1+R} \dots d\phi \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty$$

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = \frac{z^{-\alpha}}{1} \Big|_{z=-1} = e^{-\alpha \log(-1)} = e^{-i\pi\alpha}$$

Wir erhalten also:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx - e^{-2\pi i \alpha} \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx = 2\pi i e^{-\pi i \alpha}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{-\pi i \alpha}}{(1 - e^{-2\pi i \alpha})} = \frac{\pi}{\frac{(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha})}{2i}} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

1.12.2 Hauptwerte

Definition 1.12.2. Sei $x_0 \in [a, b]$, $f \in C([a, b] \setminus \{x_0\}; \mathbb{R})$, dann ist

$$HW \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

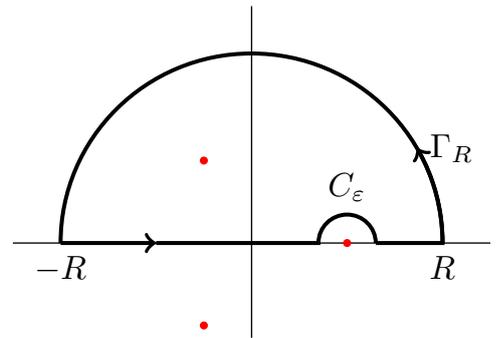
der **Hauptwert** des Integrals.

Beispiel 1.12.5. Behauptung: $HW \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^3-1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Beweis: $f(z) = \frac{1}{z^3-1}$ hat einfache Pole in $z = 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$\text{Res}[f(z), 1] = \frac{1}{(z^3-1)'} \Big|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Res}[f(z), e^{i\frac{2\pi}{3}}] = \frac{1}{(z^3-1)'} \Big|_{z=e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{e^{-i\frac{4\pi}{3}}}{3} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{3}$$



Mit dem Residuensatz erhalten wir:

$$\int_{-R}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x^3-1} + \int_{C_\varepsilon} f(z) dz + \int_{1+\varepsilon}^R \frac{dx}{x^3-1} + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), e^{i\frac{2\pi}{3}}]$$

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^3-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = -\pi i \text{Res}[f(z), 1] = -\frac{i\pi}{3},$$

wobei wir den Residuensatz auf ein Kreissegment mit Öffnungswinkel π verallgemeinert haben und ein anderes Vorzeichen erhalten, weil wir den Pfad im Uhrzeigersinn durchlaufen.

Damit erhalten wir für $R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ und $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$HW \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^3-1} + \underbrace{\int_{C_\varepsilon \rightarrow 0} f(z) dz}_{-\frac{i\pi}{3}} = 2\pi i \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{3} = -\frac{i\pi}{3} - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \square$$

2 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen (2.Ordnung) im Komplexen, Hypergeometrische Funktionen

Betrachte die homogene lineare gewöhnliche DGL (Ordnung n)

$$\omega^{(n)}(z) + p_1(z)\omega^{(n-1)}(z) + p_2(z)\omega^{(n-2)}(z) + \dots + p_n(z)\omega(z) = 0$$

(Der Koeffizient der höchsten Ableitung ist 1.)

Satz 2.0.1. Die einzigen **möglichen (endlichen)** Singularitäten einer Lösungsfunktion $\omega(z)$ sind die Singularitäten der DGL (d.h der Koeffizienten $p_i(z)$).

Beispiel 2.0.1.

$$\omega'' + \frac{1}{z}\omega' = 0$$

$\omega = \text{const}$ ist eine Lösung, hat aber in $z = 0$ keine Singularität. Es ist nicht notwendig, dass die Lösung in allen Singularitäten singularär ist, aber sie darf **keine** anderen haben.

Beispiel 2.0.2.

$$\omega' + \omega^2 = 0$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\omega(z) = \frac{1}{z - c}$$

Die Lösung hat eine Singularität in $z = c$, aber die DGL ist **nicht** linear, somit ist der Satz 2.0.1 nicht anwendbar.

Definition 2.0.1. Wenn alle Lösungen der linearen DGL in einer Singularität der DGL einen wohl bestimmten Wert haben, heisst die Singularität "**ausserwesentliche**" **Singularität der DGL** oder **Stelle der Bestimmtheit** (sonst spricht man von einer **wesentlichen Singularität**).

Satz 2.0.2. (von Fuchs)

Die DGL

$$\omega'' + p_1(z)\omega' + p_2(z)\omega = 0$$

hat in $z = a (\neq \infty)$ dann und nur dann eine ausserwesentliche Singularität, wenn:

- $p_1(z)$ oder $p_2(z)$ (oder beide) in a singularär sind.
- $p_1(z)$ in a regulär ist oder einen Pol erster Ordnung ($\sim \frac{1}{z-a}$) hat.
- $p_2(z)$ in a regulär ist oder einen Pol höchstens zweiter Ordnung ($\sim \frac{1}{(z-a)^2}$) hat.

Satz 2.0.3. (von Fuchs)

In der Umgebung von ausserwesentlichen Singularitäten $a (\neq \infty)$ existiert mindestens eine Lösung der DGL, welche die folgende Form besitzt:

$$\omega(z) = (z - a)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Der Konvergenzradius der Reihe geht mindestens bis zur nächsten Singularität der DGL und falls die Lösung dort regulär ist, bis zur nächsten Singularität der Lösung.

Bemerkung 2.0.1. Eine **Möbius Transformation**

$$z \rightarrow \xi = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $ad - bc \neq 0$ ändert den Charakter der Singularitäten einer **linearen** DGL nicht.

Betrachte eine DGL mit einer Singularität bei $z = 0$ (z.B. $p_1 = \frac{1}{z}$, $p_2 = 0$):

Durch Inversion $z \rightarrow \xi = \frac{1}{z}$ (Möbiustransformation) bekommen wir bei $\xi = \infty$ eine **ausserwesentliche Singularität** der DGL

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \infty \text{ kein regulärer Punkt der DGL} \\ p_1(\xi) = \mathcal{O}\left(\xi = \frac{1}{z}\right) \\ p_2(\xi) = \mathcal{O}\left(\xi^2 = \frac{1}{z^2}\right) \end{array} \right\} \text{ wenn } \xi \rightarrow \infty$$

(im Bsp: $p_1 = \xi$, $p_2 = 0$ und $\xi = \infty$ ausserwesentlich).

Definition 2.0.2. DGLn "der Fuchs'schen Klasse" sind lineare DGLn ohne wesentliche Singularitäten in $\overline{\mathbb{C}}$.

- Drei ausserwesentliche Singularitäten a, b, c mit der Variablen z . Betrachte die Möbiustransformation:

$$\xi = \frac{\frac{z-a}{z-c}}{\frac{b-a}{b-c}} \rightarrow 0, 1, \infty \text{ (statt: } a, b, c)$$

- Nach dem Satz 2.0.3 ist:

$$\omega(z) = (z-a)^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Für DGLn zweiter Ordnung gibt es zwei charakteristische Exponenten ρ_1, ρ_2 der DGL in a (mindestens ein Exponent existiert, einen zweiten gibt es nicht immer).

(Riemann'sche Schreibweise):

$$P \begin{pmatrix} a & b & c & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & \end{pmatrix}$$

α', α'' Charakteristische Exponenten in a

β', β'' Charakteristische Exponenten in b

γ', γ'' Charakteristische Exponenten in c

Durch Möbiustransformation und elementare Transformationen kann folgende Normalform erreicht werden:

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\beta-\alpha & \beta & \end{pmatrix}$$

Bemerkung 2.0.2. Es gilt $\alpha' + \alpha'' + \beta' + \beta'' + \gamma' + \gamma'' = 1$

Das heisst,

$$\omega''(z) + \frac{-\gamma + (1 + \alpha + \beta)z}{z(z-1)} \omega'(z) + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} \omega(z) = 0,$$

eine **hypergeometrische DGL**.

Hypergeometrische Reihe: Betrachte im Null-Punkt

$$\begin{aligned}\omega(z) &= z^\rho(1 + c_1z + c_2z^2 + \dots) \\ \rho &= 0 \text{ oder } \rho = 1 - \gamma \\ \rho &= 0 \ (\gamma \neq 0, -1, -2, \dots) \quad \omega(z) = {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) \\ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) &= 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots,\end{aligned}$$

zweite Lösung:

$$\begin{aligned}\omega(z) &= z^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; z) \\ &\quad (\gamma \neq 2, 3, 4, \dots)\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius ist entweder 1 oder ∞ . Ist er ∞ , dann bricht die Reihe ab und wir haben ein Polynom. Dies tritt ein, wenn α oder β (oder beide) grösser als Null sind.

Definition 2.0.3. *Pochhammer Symbole* $(a)_n$

$$\begin{aligned}(a)_n &= a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1) = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} \\ {}_2F_1(a, b, c; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

2 \rightarrow 2 *Pochhammer Symbole oben (Zähler)*

1 \rightarrow 1 *unten (Nenner)*

Beispiel 2.0.3. *Legendre Polynome* $P_n(x)$

$$P_n(x) = {}_2F_1(-n, n+1, 1; \frac{1-x}{2})$$

Beispiel 2.0.4.

$${}_2F_1(1, 1, 1; z) = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}$$

geometrische Reihe (Bemerkung: $\rho = 0, \rho = 1 - \gamma = 0$ da $\gamma = 1$; die zweite Lösung durch Produktansatz: $\omega(z) = \frac{\ln(z)}{z-1}$)

2.1 Konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen

Eine Variablentransformation einer hypergeometrischen DGL $\xi = \beta z$ ist eine Möbiustransformation mit

$$0, 1, \infty \rightarrow 0, \beta, \infty$$

drei ausserwesentlichen Singularitäten.

Betrachte den Grenzübergang $\beta \rightarrow \infty$ (d.h. $\beta \rightarrow \infty, \infty \rightarrow \infty$), dann hat man eine ausserwesentliche Singularität in 0, und jetzt eine wesentliche Singularität in ∞ . Das führt zu folgender DGL:

$$z\omega''(z) + (\gamma - z)\omega'(z) - \alpha\omega(z) = 0$$

2.1.1 Konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen

$z = 0$ ist eine ausserwesentliche Singularität und $z = \infty$ ist eine wesentliche Singularität:

$$\omega''(z) + \left(\frac{\gamma}{z} - 1\right)\omega'(z) - \frac{\alpha}{z}\omega(z) = 0$$

Eine Lösung in $z = 0$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\omega(z) &= {}_1F_1(\alpha, \gamma; z) = M(\alpha, \gamma; z) \text{ (oder } \Phi(\alpha, \gamma; z)) \\ &= 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots\end{aligned}$$

(für $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$, und Konvergenzradius gleich ∞) Wenn $\alpha = \gamma$, $\omega(z) = M(\alpha, \alpha; z) = e^z$ haben wir in ∞ eine wesentliche Singularität. Die zweite Lösung ist

$$\begin{aligned}\omega(z) &= z^{1-\gamma} M(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma; z) \\ &= z^{1-\gamma} \Phi(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma; z).\end{aligned}$$

- Integraldarstellung:

$$M(\alpha, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{zt} t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt$$

$$Re(\gamma) > Re(\alpha) > 0.$$

- Besselfunktion:

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1; 2ix\right)$$

- Laguerre-Polynome

$$L_n(x) = M(-n, 1; x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}); \quad n \in \mathbb{N}$$

- assoziiert Laguerre-Polynome

$$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x) = \frac{(n+m)!}{n! m!} M(-n, n+1; x)$$

Beispiel 2.1.1. Wasserstoff Atom in der QM

Die radiale Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom ist mit $V = -\frac{ze^2}{r}$ gegeben (Coulombpotential): $R(r)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 R') - \frac{Ze^2}{r} R + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{L(L+1)}{r^2} R = E R$$

Benutze:

$$\rho = \alpha r \text{ mit } \alpha^2 = -\frac{8mE}{\hbar^2}$$

$$E < 0 \text{ (gebundene zustände)} \quad \lambda = \frac{2mZe^2}{\alpha\hbar}$$

Dann erhält man

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d\chi(\rho)}{d\rho} \right) + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} \right) \chi(\rho) = 0,$$

mit $\chi(\rho) = R\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)$.

Setzt man ein, dass $\rho\chi(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{L+1} L_{\lambda-L-1}^{2L+1}(\rho)$, so kann man zeigen, dass für L_β^α die Laguerre'sche DGL folgt und somit ist diese auch erfüllt. $L \in \mathbb{N}$ ist eine natürliche Zahl (Drehimpuls). D.h. $\alpha = 2L + 1$ ist auch eine natürliche Zahl. Auch β muss eine (ganze) natürliche Zahl sein, somit muss auch λ eine natürliche Zahl sein und $n = 1, 2, \dots$, sonst würde L_β^α wie $\rho^\beta e^\rho$ für $\rho \rightarrow \infty$ divergieren. Dies ist physikalisch nicht möglich, da $\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0$ sein muss (Wellenfunktion muss Normiert sein). D.h. also $\lambda = u =$

1, 2, ...

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lambda^2 &= \frac{4m^2 z^2 e^4}{\alpha^2 \hbar^4} = \frac{4m^2 z^2 e^4}{\frac{-8mE}{\hbar^2} \hbar^4} = n^2 \\ \Rightarrow E &= \frac{-Z^2 m e^4}{2n^2 \hbar^2} \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Die normierte Wellenfunktion für das Wasserstoffatom ist somit (Winkelabhängigkeit einbezogen):

$$\begin{aligned}\Psi_{n,L,m}(r, \theta, \varphi) &= \left[\left(\frac{2z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-L-1)!}{2n(n+L)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha r}{2}\right)} (\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r) Y_L^m(\theta, \varphi) \\ (\rho = \alpha r; \quad \alpha^2 &= -\frac{8mE}{\hbar^2}, E < 0) \\ a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} &: \quad \text{Bohr-Radius} \\ L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r) &: \quad \text{Laguerre'sche Polynome} \\ &= \frac{(L+n)!}{(2L+1)!(n-L-1)!} M(L+1-n, 2L+2; \alpha r)\end{aligned}$$

3 Darstellungstheorie

3.1 Gruppen

3.1.1 Grundbegriffe

Eine **Gruppe** G ist eine Menge mit einem **Produkt** (Multiplikation) $G \times G \rightarrow G$; $(g, h) \rightarrow gh$, so dass

- $(g h) k = g (h k) \forall g, h, k \in G$ (Assoziativgesetz)
- Es existiert ein **neutrales Element** (Einselement) $1 \in G$ mit $1 g = g 1 \forall g \in G$
- Zu jedem $g \in G$ existiert ein **inverses Element** $g^{-1} \in G$ sodass $g g^{-1} = g^{-1} g = 1$

Das neutrale Element ist eindeutig, denn aus $1' 1 = 1$ und $1' 1 = 1'$ folgt $1 = 1'$. Das Inverse eines Elements ist ebenfalls eindeutig. Sind nämlich g' und g'' zwei Inverse von g , so gilt $g' = g' 1 = g' (g g'') = (g' g) g'' = 1 g'' = g''$. Das Inverse von 1 ist 1 .

- Die **Ordnung** einer Gruppe G ist die Anzahl Elemente von G . Sie kann auch ∞ sein.
- Eine Gruppe heisst **abelsch**, falls $g h = h g \forall g, h \in G$ (Kommutativgesetz). In diesem Fall wird G oft additiv geschrieben: statt $g h$ wird $g + h$, statt 1 wird 0 und statt g^{-1} wird $-g$ verwendet. Man schreibt auch $g - h$ statt $g + (-h)$. Wohlbekannte Beispiele sind die Gruppen \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} .
- Eine Untergruppe H einer Gruppe G ist eine nichtleere Teilmenge von G , so dass $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H$ und $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$. Eine Untergruppe ist selbst eine Gruppe.
- Das **direkte Produkt** $G_1 \times G_2$ zweier Gruppen G_1, G_2 ist das kartesische Produkt mit Multiplikation $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$. Es ist eine Gruppe mit neutralem Element $(1, 1)$ und Inversem $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$.

3.1.2 Beispiele

1. **Symmetrische Gruppe**. Eine Permutation von n Elemente ist eine bijektive Abbildung

$$\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Die Permutationen von n Elementen bilden eine Gruppe mit der Zusammensetzung von Abbildungen als Produkt:

$$(\pi_1 \pi_2)(i) = (\pi_1 \circ \pi_2)(i) = \pi_1(\pi_2(i)).$$

Beispiel:

$$(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3) \rightarrow (2, 3, 1)$$

Das neutrale Element ist die Identität, das inverse Element von π ist die inverse Abbildung π^{-1} . Diese Gruppe heisst **symmetrische Gruppe** S_n und hat Ordnung $n!$.

2. **Dihedrale Gruppe** D_n . $D_n, n \geq 3$ besteht aus den orthogonalen Transformationen der Ebene die ein reguläres im Ursprung zentriertes n -Eck invariant lassen. Sind die Ecken $v_0, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^2$, im Gegenuhrzeigersinn numeriert, so ist die Drehung R im Winkel $2\pi/n$ in D_n und durch $R v_i = v_{i+1}$ gegeben. Die Spiegelung S um die durch v_0 und 0 gegebene Achse ist auch in D_n und erfüllt $S v_i = v_{n-i}$.

Lemma 3.1.1. *Die Elemente von D_n sind:*

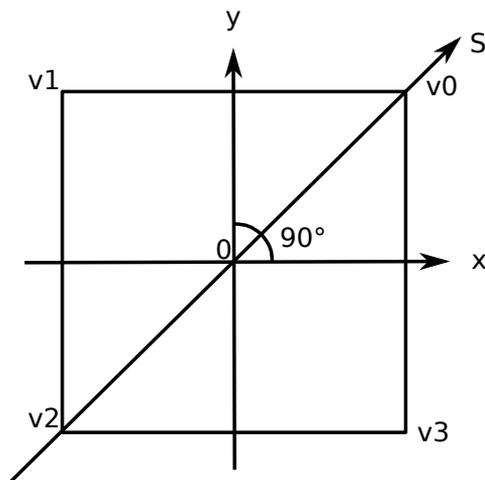
$$1, R, R^2, \dots, R^{n-1}, S, RS, R^2S, \dots, R^{n-1}S.$$

Insbesondere hat D_n Ordnung $2n$. (Ohne Beweis)

Beispiel 3.1.1. $D_4 =$ *Gruppe der Symmetrien eines Quadrates.*

- 1 : Identität
- R : Drehung um 90°
- R^2 : Drehung um 180°
- R^3 : Drehung um 270°

*Diese lassen das Quadrat invariant. S : Spiegelung um die Achse S . RS, R^2S, R^3S : Spiegelung und Drehung. Insgesamt gibt es 8 Elemente (alle anderen lassen sich durch Zusammensetzung der 8 Elemente konstruieren). D_4 ist eine **nicht abelsche** Gruppe ($RS \neq SR$).*



3. **Allgemeine lineare Gruppe** $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$.

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{ \text{invertierbare reelle } n \times n \text{ Matrizen} \}$
- $GL(n, \mathbb{C}) = \{ \text{invertierbare komplexe } n \times n \text{ Matrizen} \}$

Das Produkt ist die Matrizenmultiplikation und das neutrale Element die Einheitsmatrix.

4. **Orthogonale Gruppe** $O(n)$. Eine $m \times n$ Matrix A heisst orthogonal, falls $A^T A = \mathbb{1}$. Jede orthogonale Matrix ist invertierbar, denn $1 = \det(A^T A) = \det(A^T) \det A = (\det A)^2$, also $\det A \neq 0$. Es folgt, dass $A^{-1} = A^T$. Sind A, B orthogonal, so ist $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = \mathbb{1}$ und AB ist orthogonal. Ist A orthogonal, so ist $AA^T = \mathbb{1}$ und $A^{-1} = A^T$ ist orthogonal. Die orthogonalen $n \times n$ Matrizen bilden also eine Untergruppe $O(n)$ von $GL(n, \mathbb{R})$:

$$O(n) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1} \}$$

Besonders wichtig für die Physik ist die Gruppe $O(3)$ der orthogonalen Transformationen des physikalischen Raumes \mathbb{R}^3 .

5. $O(n)$ ist die Gruppe der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die das Skalarprodukt

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

invariant lassen: $O(n) = \{ A \mid (Ax, Ay) = (x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n \}$. Allgemeiner betrachten wir die symmetrischen Bilinearform auf \mathbb{R}^{p+q} :

$$(x, y)_{p,q} = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i,$$

und definieren

$$O(p, q) = \{A \in GL(p + q, \mathbb{R}) \mid (Ax, Ay)_{p,q} = (x, y)_{p,q}\}.$$

Insbesondere ist $O(n, 0) = O(n) = O(0, n)$. Die Gruppe $O(1, 3)$ ist die Lorentzgruppe. Sie erhält die "Minkowski Metrik": $(x, y)_{1,3} = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$ auf der Raumzeit \mathbb{R}^4 .

6. Unitäre Gruppe $U(n)$

$$\begin{aligned} U(n) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^*A = \mathbb{1}\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid (Az, Aw) = (z, w), \forall z, w \in \mathbb{C}^n\}, \end{aligned}$$

wobei $(z, w) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$ das Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n ist.

7. Symplektische Gruppe $Sp(2n)$. Betrachte folgende antisymmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^{2n} :

$$w(X, Y) = \sum_{i=1}^n (X_{2i-1}Y_{2i} - X_{2i}Y_{2i-1}),$$

wobei X_i die i -te Komponente von $X \in \mathbb{R}^{2n}$ bezeichnet. Die symplektische Gruppe ist dann

$$Sp(2n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid w(Ax, Ax') = w(X, X')\}.$$

In der klassischen Mechanik tritt diese Gruppe als Gruppe der linearen kanonischen Transformationen des Phasenraumes \mathbb{R}^{2n} mit Ortskoordinaten $q_i = X_{2i-1}, p_i = X_{2i}$ auf (d.h. $\{q_1, p_1, \dots, q_n, p_n\}$).

8. Untergruppen der speziellen linearen Gruppen (mit zusätzlich $\det A = 1$):

- a) $SL(n, K) = (SGL(n, K)) = \{A \in GL(n, K) \mid \det A = \mathbb{1}\}$ Spezielle lineare Gruppe
- b) $SO(n) = \{A \in SL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = \mathbb{1}\}$ Spezielle orthogonale Gruppe
- c) $SU(n) = \{A \in SL(n, \mathbb{C}) \mid A^* A = \mathbb{1}\}$ Spezielle unitäre Gruppe

3.1.3 Begriffe

- Eine Gruppe G **operiert** auf einer Menge M , wenn eine Abbildung $G \times M \rightarrow M, (g, x) \mapsto gx$ gegeben ist, die der Eigenschaft $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ genügt für alle $g_1, g_2 \in G, x \in M$.
- Jede Gruppe operiert auf sich selbst durch Gruppenmultiplikation.
- $GL(n, \mathbb{R})$ operiert auf \mathbb{R}^n durch Anwendung v.on Matrizen auf Vektoren
- $O(n)$ operiert auf $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$, dann ist für $A \in O(n)$: $|Ax| = |x|$.

- Ein **Homomorphismus** $\phi : G \rightarrow H$ von einer Gruppe G nach einer Gruppe H ist eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$. Ist zusätzlich ϕ bijektiv, so heisst ϕ **Isomorphismus**. Sind $\phi : G \rightarrow H$, $\psi : H \rightarrow K$ Homomorphismen, so ist $\psi \circ \phi : G \rightarrow K$ ein Homomorphismus. Die inverse Abbildung eines Isomorphismus ist ebenfalls ein Isomorphismus. Isomorphismen $G \rightarrow G$ bilden also eine Gruppe $\text{Aut}(G)$, die Gruppe der Automorphismen von G .
- Der **Kern** von ϕ ist die Menge

$$\text{Ker } \phi = \{g \in G \mid \phi(g) = 1\} \subset G$$

- Das **Bild** von ϕ ist die Menge

$$\text{Im } \phi = \{\phi(g) \mid g \in G\} \subset H$$

Satz 3.1.1. Sei $\phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus

1. $\phi(1) = 1$, $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1})$
2. $\text{Ker } \phi$ ist eine Untergruppe von G , $\text{Im } \phi$ ist eine Untergruppe von H
3. ϕ ist genau dann injektiv wenn $\text{Ker } \phi = \{1\}$

(ohne Beweis)

Korollar 3.1.1. Ein Homomorphismus $\phi : G \rightarrow H$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\text{Ker } \phi = \{1\}$ und $\text{Im } \phi = H$.

Definition 3.1.1. Zwei Gruppen G, H heissen **isomorph** ($G \simeq H$), falls ein Isomorphismus $G \rightarrow H$ existiert.

Definition 3.1.2. Sei \tilde{H} eine Untergruppe einer Gruppe G . Die Menge G/\tilde{H} der (Links -)Nebenklassen von \tilde{H} in G ist die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists h \in \tilde{H} \text{ mit } g_2 = g_1 h,$$

(d.h. nehme $h \in \tilde{H}$ und bilde gh mit $g \in G$). G/\tilde{H} ist im allgemeinen keine Gruppe. Ist aber \tilde{H} ein **Normalteiler** von G , d.h. eine Untergruppe mit der Eigenschaft, dass $ghg^{-1} \in \tilde{H} \forall g \in G, h \in \tilde{H}$, so hat G/\tilde{H} eine "natürliche" Gruppenstruktur.

Satz 3.1.2. Sei \tilde{H} ein Normalteiler von G und es bezeichne $[g]$ die Klasse von g in G/\tilde{H} , dann ist für alle g_1, g_2 das Produkt

$$[g_1][g_2] = [g_1g_2]$$

wohldefiniert und G/\tilde{H} mit diesem Produkt ist eine Gruppe, welche **Faktorgruppe** von $G \text{ mod } \tilde{H}$ heisst.

Beweis. Das Produkt $[g_1][g_2]$ ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten g_1, g_2 . Sind g_1h_1, g_2h_2 andere Repräsentanten, so ist

$$g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2 \underbrace{(g_2^{-1}h_1g_2h_2)}_{\in \tilde{H}} \in [g_1g_2].$$

Assoziativität folgt aus der Assoziativität von G , das neutrale Element ist $[e]$ und $[g]^{-1} = [g^{-1}]$. \square

Beispiele

1. $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Jede Untergruppe einer abelschen Gruppe ist ein Normalteiler.
2. Es sei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix. Die Teilmenge $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \subset SL(2, \mathbb{C})$ ist eine Untergruppe. $\forall A \in SL(2, \mathbb{C})$ gilt $A(\pm\mathbb{1})A^{-1} = \pm\mathbb{1}$, also ist $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ ein Normalteiler. Die Gruppe $SL(2, \mathbb{C})/\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$ ist isomorph zur Gruppe der Möbiustransformationen.
3. Für jeden Homomorphismus $\phi : G \rightarrow H$ ist $Ker \phi$ ein Normalteiler von G , denn aus $\phi(h) = 1$ folgt

$$\phi(ghg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(g)^{-1} = 1$$

Satz 3.1.3. Sei $\phi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von Gruppen, dann gilt

$$G/Ker \phi \simeq Im \phi$$

Der Isomorphismus ist $[g] \mapsto \phi(g)$ für beliebige Wahl der Repräsentanten. (Ohne Beweis)

3.2 Darstellung von Gruppen

Wenn eine Gruppe auf einem Vektorraum durch lineare Abbildungen operiert, so spricht man von einer Darstellung.

Definition 3.2.1. • Eine (reelle bzw. komplexe) **Darstellung** einer Gruppe G auf einem \mathbb{R} - (bzw. \mathbb{C}) Vektorraum $V \neq 0$ ist ein Homomorphismus $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Der Vektorraum V heisst dann **Darstellungsraum** der Darstellung ρ .

- Also ordnet die Darstellung ρ jedem Element g von G eine invertierbare lineare Abbildung $\rho(g) : V \rightarrow V$ zu, so dass für alle $g, h \in G$ die "Darstellungseigenschaft" $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ gilt.
- Eine Darstellung ρ auf V wird mit (ρ, V) bezeichnet, wobei V der Darstellungsraum ist. Die **Dimension** einer Darstellung (ρ, V) ist die Dimension des Darstellungsraumes V (oder der Darstellungsmatrizen).

Beispiele

1. Die triviale Darstellung: $V = \mathbb{C}$, $\rho(g) = 1 \forall g \in G$.
2. $G = S_n$, $V = \mathbb{C}^n$ mit Basis e_1, \dots, e_n , $\rho(g)e_i = e_{g(i)}$, $g \in S_n$ (S_n : Permutation).
3. $G = \mathcal{O}(3)$, $U = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$

Lemma 3.2.1. Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung. Dann ist $\rho(1) = 1_V$ die Identitätsabbildung $V \rightarrow V$ und $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$

Beweis. $\rho(g) = \rho(g1) = \rho(g)\rho(1)$, da $\rho(g)$ invertierbar ist, folgt dass $\rho(1)$ die Identität ist. Es gilt $1_V = \rho(1) = \rho(gg^{-1}) = \rho(g)\rho(g^{-1})$ also $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$. \square

Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X , so bildet sie eine Darstellung auf dem Vektorraum aller komplexen- oder reellwertigen Funktionen auf X $(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$.

Definition 3.2.2. Ein **Homomorphismus** von Darstellungen $(\rho_1, V_1) \rightarrow (\rho_2, V_2)$ ist eine lineare Abbildung $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ so dass $\phi\rho_1(g) = \rho_2(g)\phi$, $\forall g \in G$. Zwei Darstellungen (ρ_1, V_1) , (ρ_2, V_2) sind **äquivalent** (oder **isomorph**), falls ein bijektiver Homomorphismus von Darstellungen $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ existiert. Der Vektorraum aller Homomorphismen $(\rho_1, V_1) \rightarrow (\rho_2, V_2)$ wird mit $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ oder $\text{Hom}_G((\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2))$ bezeichnet.

Definition 3.2.3. Ein **invarianter Unterraum** einer Darstellung (ρ, V) ist ein Unterraum $W \subset V$ mit $\rho(g)W \subset W \forall g \in G$. Eine Darstellung (ρ, V) heisst **irreduzibel**, falls sie keine invarianten Unterräume ausser V und $\{0\}$ besitzt, sonst **reduzibel**. Ist $W \neq \{0\}$ ein invarianter Unterraum, so ist die Einschränkung $\rho|_W : G \rightarrow GL(W)$, $g \rightarrow \rho(g)|_W$ eine Darstellung: $(\rho|_W, W)$ ist eine **Unterdarstellung** von (ρ, V) . Eine Darstellung (ρ, V) heisst **vollständig reduzibel**, falls invariante Unterräume V_1, \dots, V_n existieren, so dass $V = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ und die Unterdarstellungen $(\rho|_{V_i}, V_i)$ irreduzibel sind. Eine solche Zerlegung von V heisst Zerlegung in irreduzible Darstellungen.

Bemerkung 3.2.1. Nicht jede reduzible Darstellung ist vollständig reduzibel.

Lemma 3.2.2. Eine Darstellung (ρ, V) ist genau dann vollständig reduzibel, wenn zu jedem invarianten Unterraum W ein invarianter Unterraum W' mit $W' \oplus W = V$ existiert. (Ohne Beweis).

- In der Matrixschreibweise ist eine Darstellung $\Gamma(R)$ vollständig reduzibel, falls eine Transformation der Art

$$\Gamma'(R) = M^{-1}\Gamma(R)M$$

existiert, so dass für jedes Element $R \in G$ eine gleichartige Blockdiagonalisierung

$$\begin{pmatrix} \Gamma^{(1)}(R) & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & \Gamma^{(2)}(R) & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \Gamma^{(n)}(R) \end{pmatrix}$$

erfolgt, mit Matrizen $\Gamma^{(i)}(R)$ niedriger Dimension entlang der Diagonalen.

- Die reduzierbaren Matrizen $\Gamma^{(i)}(R)$ bilden ebenfalls eine Darstellung von G .
- Γ zerfällt in die Bestandteile $\Gamma^{(i)} : \Gamma = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \Gamma^{(3)} + \dots$
- Eine vollständige Reduktion ist erwirkt, wenn jedes Einzelbestandteil $\Gamma^{(i)}$ selbst nicht mehr reduzierbar ist. (\Rightarrow Irreduzible Darstellungen $\Gamma^{(n)}$)
- Dieselben irreduziblen Bestandteile $\Gamma^{(n)}$ können mehrfach in einer reduziblen Darstellung erhalten sein, wobei die Multiplizität angibt, wie oft $\Gamma^{(n)}$ erhalten ist.

3.2.1 Unitäre Darstellungen

Wir betrachten endlichdimensionale komplexe Darstellungen.

Definition 3.2.4. Eine Darstellung ρ auf einem Vektorraum V mit Skalarprodukt heisst **unitär** falls $\rho(g) \forall g \in G$ unitär ist (d.h. Matrizen der Darstellung sind unitär).

Also gilt für eine unitäre Darstellung $\rho(g)^* = \rho(g)^{-1} \forall g \in G$. Mit dem vorherigen Lemma kann diese Bedingung als $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^*$ geschrieben werden.

Satz 3.2.1. Unitäre Darstellungen sind vollständig reduzibel.

Satz 3.2.2. Sei (ρ, V) eine Darstellung einer endlichen Gruppe G . Dann existiert ein Skalarprodukt $(,)$ auf V , so dass (ρ, V) unitär ist.

Korollar 3.2.1. Darstellungen von endlichen Gruppen sind vollständig reduzibel.

Seien nun $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ komplexe endlichdimensionale Darstellungen einer Gruppe G . Wir untersuchen den Raum $Hom_G(V_1, V_2)$ der linearen Abbildungen

$$\phi : V_1 \rightarrow V_2, \quad \text{so dass} \quad \phi \rho_1(g) = \rho_2(g) \phi, \forall g \in G$$

Lemma 3.2.3. (Lemma von Schur) Seien $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ irreduzible komplexe endlichdimensionale Darstellungen von G . Dann gilt:

1. $\phi \in Hom_G(V_1, V_2) \Rightarrow \phi = 0$ oder ϕ ist ein Isomorphismus
2. $\phi \in Hom_G(V_1, V_1) \Rightarrow \phi = \lambda Id, \lambda \in \mathbb{C}$

In Matrizensprache:

1. Seien $\Gamma^\alpha, \Gamma^\beta$ zwei irreduzible Darstellungen einer Gruppe und sei M eine Matrix mit

$$M\Gamma^\alpha(R) = \Gamma^\beta(R)M,$$

für alle R in der Gruppe (M ist nicht notwendigerweise quadratisch). Dann folgt

- a) wenn $d_\alpha \neq d_\beta$ (M nicht quadratisch): $M = 0$. (d_α : Dimension der Matrix M).

b) wenn $d_\alpha = d_\beta$ entweder $M = 0$ oder M nichtsingulär ($\det M \neq 0$), in welchem Falle $\Gamma^{(\alpha)}$ und Γ^β äquivalente Darstellungen sind.

2. Eine Darstellung Γ^α ist genau dann irreduzibel, wenn die einzigen Matrizen, die mit $\Gamma^\alpha(R) \forall R$ kommutieren, die "Skalarmatrizen" $M = \lambda \mathbb{1}$, mit $\lambda \in \mathbb{C}$ sind.

Dieses Lemma nennt man auch Lemma von Schur. (Ohne Beweis)

Korollar 3.2.2. Jede irreduzible endlichdimensionale komplexe Darstellung einer abelschen Gruppe ist eindimensional.

3.3 Darstellungstheorie von endlichen Gruppen

G bezeichnet eine endliche Gruppe. Alle Darstellungen werden endlichdimensional und komplex angenommen.

3.3.1 Orthogonalitätsrelationen der Matrixelemente

Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe G der Dimension d . Wir wissen, dass ein Skalarprodukt auf V existiert, so dass ρ unitär ist. Also ist für alle $g \in G$ die Matrix $(\rho_{ij}(g))$ von $\rho(g)$ bezüglich einer beliebigen orthonormierten Basis unitär: $\rho_{ij}(g^{-1}) = \overline{\rho_{ji}(g)}$.

Satz 3.3.1. Seien $\rho : G \rightarrow GL(V)$, $\rho' : G \rightarrow GL(V')$ irreduzible unitäre Darstellungen einer endlichen Gruppe G . Es bezeichne $(\rho_{ij}(g))$, $(\rho'_{ij}(g))$ die Matrizen von $\rho(g)$, $\rho'(g)$ bezüglich orthonormierten Basen von V , bzw. V'

1. Sind ρ, ρ' inäquivalent, so gilt $\forall i, j, k, l$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho'_{kl}(g) = 0$$

2. Für alle i, j, k, l gilt

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho_{kl}(g) = \frac{1}{\dim(V)} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Wobei $|G|$ die Anzahl Elemente von G oder die Ordnung der Gruppe G ist.

Der Beweis beruht auf dem Lemma von Schur.

Der **Charakter** einer endlichdimensionalen Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ einer Gruppe G ist die komplexwertige Funktion auf G ($tr = \text{Spur}$)

$$\chi_\rho(g) = tr(\rho(g)) = \sum_{j=1}^{\dim V} \rho_{jj}(g)$$

$\rho_{jj}(g)$ sind die Matrixelemente bezüglich einer beliebigen Basis von G . Aus der Eigenschaft $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ der Spur, wobei A, B Matrizen sind, folgt:

Satz 3.3.2.

1. $\chi_\rho(g') = \chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$
2. Sind ρ, ρ' äquivalente Darstellungen, so gilt $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$. Es existiert also eine Matrix h sodass $\Gamma = h\Gamma'h^{-1}$.

Eine **Konjugationsklasse** von G ist eine Teilmenge von G der Form $\{hgh^{-1}, h \in G\}$. Die Gruppe G zerfällt in Konjugationsklassen, der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim: g \sim g'$ (g ist konjugiert zu g') falls ein $h \in G$ existiert, sodass $g' = hgh^{-1}$. Dann bedeutet der erste Punkt des Satzes, dass χ_ρ einen konstanten Wert auf jeder Konjugationsklasse annimmt.

Lemma 3.3.1.

1. $\chi_\rho(1) = \dim(V)$ da

$$\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \dim V$$

2. $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$

3. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}, \forall g \in G$

Definition 3.3.1. Die **reguläre Darstellung** ist definiert durch die Matrizen

$$\Gamma_{ij}^{(reg)}(g) = \delta(g_i^{-1}gg_j)$$

($g_i, g_j \in G$, somit auch $g_i^{-1} \in G, g \in G$). Wobei

$$\delta(g) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g = e \text{ (Einselement)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 3.3.2. Der **Charakter** von Γ^{reg} ist definiert als

$$\chi_{reg} = \sum_{i=1}^{|G|} \delta(g_i^{-1}gg_i) = \begin{cases} |G| & \text{falls } g = e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3.3.2 Orthogonalitätsrelationen der Charakteren

Aus den Orthogonalitätsrelationen von Matrixelementen folgen Orthogonalitätsrelationen der Charakteren von irreduziblen Darstellungen. Wir führen das Skalarprodukt $(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$ auf dem Raum $\mathbb{C}(G)$ aller komplexwertigen Funktionen auf G ein.

Satz 3.3.3. *Seien ρ, ρ' irreduzible Darstellungen der endlichen Gruppe G und seien $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ ihre Charakteren. Dann gilt*

1. *Sind ρ, ρ' inäquivalent, so gilt $(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 0$*
2. *Sind ρ, ρ' äquivalent, so gilt $(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 1$*

Beweis.

$$\begin{aligned} (\chi_\rho, \chi_{\rho'}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\rho(g)} \chi_{\rho'}(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{\dim V} \overline{\rho_{ii}(g)} \sum_{j=1}^{\dim V'} \rho'_{jj}(g) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz 3.3.1 gilt $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho'_{kl}(g) = 0$ und damit kann der erste Punkt bewiesen werden. Für den zweiten Punkt kann man nach Satz 3.3.2 $\rho = \rho'$ annehmen (haben gleiche Charakteren). Mit Satz 3.3.1 gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{\dim V} \overline{\rho_{ii}(g)} \sum_{j=1}^{\dim V} \rho_{jj}(g) &= \sum_{i=1}^{\dim V} \sum_{j=1}^{\dim V} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ii}(g)} \rho_{jj}(g) \\ &= \sum_{i=1}^{\dim V} \sum_{j=1}^{\dim V} \frac{1}{\dim V} \delta_{ij} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{\dim V} \frac{1}{\dim V} \delta_{ii} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Korollar 3.3.1. *Ist $\rho = \rho_1 \oplus \rho_1 \cdots \oplus \rho_n$ eine Zerlegung einer Darstellung ρ in irreduzible Darstellungen und σ eine irreduzible Darstellung (jeweils derselben Gruppe G), so ist die Anzahl ρ_i äquivalent zu σ gleich (χ_ρ, χ_σ) . Insbesondere ist (χ_ρ, χ_σ) stets eine nichtnegative ganze Zahl und $(\chi_\rho, \chi_\sigma) = 1$ genau dann, wenn ρ irreduzibel ist.*

Aus diesem Korollar folgt, dass für jede Zerlegung $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \cdots \oplus \rho_n$ in irreduzible Darstellungen die Anzahl ρ_i äquivalent zu einer vorgegebenen irreduziblen Darstellung σ unabhängig von der Wahl der Zerlegung ist. Ist diese Zahl m , so sagt man, dass die irreduzible Darstellung σ m Mal in der Darstellung ρ vorkomme.

3.3.3 Zerlegung der regulären Darstellungen

Folgender Satz zeigt, dass jede irreduzible Darstellung im Prinzip aus der Zerlegung der regulären Darstellung gewonnen werden kann:

Satz 3.3.4. *Jede irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe G kommt in der regulären Darstellung vor. Hat eine irreduzible Darstellung die Dimension d , so kommt sie d mal in der regulären Darstellung vor.*

Beweis. Nach dem vorherigen Korollar ist die Anzahl, mit der eine irreduzible Darstellung σ in einer representation ρ vorkommt, gegeben durch (χ_ρ, χ_σ) , für $\rho = \Gamma^{reg}$ also

$$\begin{aligned} (\chi_{reg}, \chi_\sigma) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{\chi_{reg}(g)}_{=|\delta_{ge}|} \chi_\sigma(g) \\ &= \chi_\sigma(e) \\ &= d \end{aligned}$$

Korollar 3.3.2. *Eine endliche Gruppe G besitzt endlich viele Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen. Ist ρ_1, \dots, ρ_k eine Liste von irreduziblen inäquivalenten Darstellungen, so gilt für ihre Dimension d_i :*

$$d_1^2 + \dots + d_k^2 = |G|$$

Denn es gilt $\chi_{reg}(g) = \sum_{i=1}^k d_i \chi_{\rho_i}(g)$. Insbesondere setze $g = e$ ein, dann $\chi_{\rho_i}(e) = d_i$ und somit $|G| = \sum_i d_i^2$. □

3.3.4 Charaktertafel einer endlichen Gruppe

Die Charaktertafel einer endlichen Gruppe G ist eine Liste der Werte der Charakteren aller irreduziblen Darstellungen. Nach Korollar 3.3.1 können diese Tafeln dazu verwendet werden, um die irreduziblen Bestandteile jeder gegebenen Darstellung zu bestimmen.

Charaktertafeln vieler endlicher Gruppen findet man in Büchern oder Programmen für algebraische Rechnungen

Da Charakteren konstante Werte auf Konjugationsklassen annehmen, genügt es, die Werte der Charakteren für ein Element in jeder Konjugationsklasse anzugeben.

G	E	$g_{k_2}k_2$	$g_{k_3}k_3$	\dots	$d_{k_n}k_n$
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	\dots	1
$\Gamma^{(2)}$	d_2	$\chi^{(2)}(k_2)$	$\chi^{(2)}(k_3)$	\dots	$\chi^{(2)}(k_n)$
\vdots	\vdots	\vdots			\vdots
$\Gamma^{(\nu)}$	d_ν	$\chi^{(\nu)}(k_2)$	$\chi^{(\nu)}(k_3)$	\dots	$\chi^{(\nu)}(k_n)$

Tabelle 3.1: Charaktertafel

Dabei gelten folgende Regeln und Notationen:

- k_i : typisches Element der Konjugationsklasse
- g_{k_i} : Zahl der Elemente in der Konjugationsklasse k_i
- $\Gamma^{(1)} \dots \Gamma^{(\nu)}$: irreduzible Darstellungen

- In der ersten Zeile der Charaktertafel stehen immer die Charakteren der “Einsdarstellung”.
- In der ersten Spalte der Charaktertafel stehen immer die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen.

$$\chi^{(\nu)}(E) = d_\nu$$

Konstruktion einer Charaktertafel

Folgende Hilfsmittel werden benützt:

1. Die Zahl n_{ID} der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe ist gleich der Zahl n_{KL} der Konjugationsklassen (Satz von Burnside, Ohne Beweis). Das heisst also, dass es so viele Spalten wie Zeilen in der Tafel gibt. Letztere n_{KL} findet man leicht indem man mittels der Gruppentafel aller zueinander konjugierten Elemente $g' = hgh^{-1}$ berechnet.
2. Die Dimensionalitäten d_ν der irreduziblen Darstellungen $\Gamma^{(k)}$ werden bestimmt durch die Formel

$$\begin{aligned}
 \underbrace{|G|}_{\text{Anzahl Elemente der Gruppen}} &= \sum_{\nu=1}^{\overbrace{n}^{=n_{ID}}} d_\nu^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{\overbrace{n}^{=n_{KL}}} \underbrace{g_{k_i}}_{\text{Anzahl Elemente in Konjugationsklasse}},
 \end{aligned}$$

mit $n_{ID} = n_{KL}$. Dadurch erhält man:

$$g = \sum_{\nu=1}^n d_{\nu}^2 = \sum_{k=1}^n g_k$$

In den meisten Fällen hat diese Gleichung eine eindeutige Lösung.

3. Da das Einselement E durch die Einheitsmatrix dargestellt wird, gilt

$$\chi^{\nu}(E) = d_{\nu}$$

Dies legt die erste Spalte fest.

4. Da die Einsdarstellung immer als irreduzible Darstellung existiert, ist die erste Zeile immer eine Folge der Zahlen eins: $\chi^{(1)} = 1$.
5. Die Zeilen der Tafel müssen orthogonal und auf $g = |G|$ normiert sein mit den Gewichtungsfaktoren g_k (Orthogonalität der Charakteren):

$$\sum_{k=1}^n g_k \chi^{\nu}(k) (\chi^{(\gamma)}(k))^* = g \delta_{\nu\mu}$$

6. Die Spalten müssen orthogonale, auf g/g_k normierte Vektoren sein (Vollständigkeit der Charakteren):

$$\sum_{\nu=1}^n \chi^{\nu}(k) (\chi^{(\nu)}(k'))^* = \frac{g}{g_k} \delta_{kk'}$$

7. Die Elemente der ν -ten Zeile sind verknüpft durch

$$g_{k_i} g_{k_j} \chi^{\nu}(k_i) \chi^{\nu}(k_j) = d_{\nu} \sum_k c_{ijk} g_{k_k} \chi^{\nu}(k_k),$$

wobei die Koeffizienten c_{ijk} ganze positive Zahlen (oder Null) sind und durch die Klassenmultiplikation (Konjugierte Klassen) $k_i \times k_j = \sum_k c_{ijk} k_k$ definiert werden.

Theorem 3.3.1. Die $g_{k_i} g_{k_j}$ Elemente des Produktes $k_i \times k_j = \{R^{(i)}\}\{R^{(j)}\}$, i.e. des Produktes aller Elemente einer Klasse k_i mit denen von k_j , lassen sich in eine Folge ganzer (vollständiger) Klassen zerlegen:

$$k_i \times k_j = \sum_k c_{ijk} k_k$$

Die Koeffizienten c_{ijk} ("Klassenmultiplikatoren") sind ganze positive Zahlen ohne Null. (Bemerkung: Klassen = Konjugationsklassen)

3.3.5 Kanonische Zerlegung einer Darstellung

- Sei G eine endliche Gruppe und $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i)$, $i = 1, \dots, k$ die Liste der inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von G , d.h. eine Liste von irreduziblen Darstellungen, mit der Eigenschaft dass jede irreduzible Darstellung äquivalent zu genau einer aus der Liste ist.
- Sei jetzt eine Darstellung ρ auf einem Vektorraum V gegeben. Es sei $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ eine Zerlegung in irreduzible invariante Unterräume. Für jedes $i = 1, \dots, k$ definieren wir W_i als die direkte Summe all derjenigen U_j , so dass $\rho|_{U_j}$ äquivalent zu ρ_i ist. Dann ist

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k, \tag{3.3.1}$$

wobei $W_i = \{0\}$ sein darf. Diese Zerlegung kann rein aus den Charakteren χ_i der irreduziblen Darstellungen ρ_i erhalten werden.

Satz 3.3.5. Die Zerlegung (3.3.1) ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von V in irreduzible Darstellungen. Die Projektion

$$p_i : V \rightarrow W_i, \quad w_1 \oplus \dots \oplus w_n \mapsto w_i$$

ist durch die Formel

$$p_i(v) = \frac{\dim(V_i)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(g)v$$

gegeben mit $v \in V$, d.h. Vektoren in V . (Ohne Beweis)

(d.h also $p_i(v) = v$ falls $v \in W_i$ und $p_i(v) = 0$ falls $v \in W_j$, $j \neq i$).

Bemerkung: Die Zerlegung (3.3.1) heisst **kanonische Zerlegung** und die Unterräume W_i heissen **isotypische Komponenten**.

3.3.6 Die Projektionsformel

Nach der obigen Zerlegung können wir die Darstellung als orthogonale Summe irreduzibler Darstellungen schreiben:

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^k m_i \rho_i = m_1 \rho_1 \oplus \dots \oplus m_k \rho_k \tag{3.3.2}$$

Bemerkung: Jeder Unterraum W_i ist eine direkte Summe aus m_i Unterräumen U_j auf denen ρ isomorph zu einer irreduziblen Darstellung ρ_i ist:

$$\rho = \underbrace{m_1 \rho_1}_{W_1} \oplus \dots \oplus \underbrace{m_k \rho_k}_{W_k}, \quad W_i = \bigoplus_{j=1}^{m_i} U_j \text{ mit } (\rho|_{U_j}, U_j) \simeq (\rho_i, V_i), \quad V \text{ wird also zerlegt in}$$

$$V = \underbrace{U_1 \oplus \dots \oplus U_{m_1}}_{W_1} \oplus \dots \oplus \underbrace{U_{m_1+\dots+m_{k-1}+1} \oplus \dots \oplus U_{n=m_1+\dots+m_k}}_{W_k}.$$

Satz 3.3.6. Die **Multiplizität** m_i mit welcher die irreduzible Darstellung (ρ_i, V_i) in (ρ, V) vorkommt ist gegeben durch

$$m_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_{\rho}(g)$$

Beweis. Wir definieren den Endomorphismus $\varphi_{\rho} \in \text{End}(V)$ durch die mittlere Operation der Gruppe G auf V , durch die Darstellung ρ :

$$\varphi_{\rho} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \quad (3.3.3)$$

Sei $V^G = \{v \in V \mid \rho(g)v = v \forall g \in G\}$ der invariante Unterraum der Darstellung (ρ, V) :

$$\begin{aligned} \rho(g) \circ \varphi_{\rho}(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho(g)\rho(h)v = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho(gh)v \\ &\stackrel{g' = gh}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho(g')v = \varphi_{\rho}(v) \quad \forall g \in G, \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\rho}(V) \subseteq V^G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall v \in V^G : \quad \varphi_{\rho}(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} v = v \quad \Rightarrow \quad V^G \subseteq \varphi_{\rho}(V) \\ &\Rightarrow \quad \varphi_{\rho}(V) = V^G \quad \text{und} \quad \varphi_{\rho} \circ \varphi_{\rho} = \varphi_{\rho}, \end{aligned}$$

weil V auf V^G abgebildet wird und V^G invariant unter φ_{ρ} ist. Also ist φ_{ρ} eine Projektion von V auf den invarianten Unterraum V^G .

Der Raum V^G ist aber per Definition der Unterraum W_1 auf dem ρ trivial wirkt und da die triviale Darstellung ρ_1 die Dimension 1 hat, ist die Dimension von V^G gerade die Multiplizität m_1 von ρ_1 in ρ . Die Spur einer Projektion ist aber immer die Dimension des Unterraumes auf den projiziert wird. Also gilt:

$$m_1 = \dim V^G = \text{Tr}_V(\varphi_{\rho}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho}(g) \quad (3.3.4)$$

Damit wäre der Satz 3.3.6 für den Spezialfall der trivialen Darstellung bewiesen.

Wir können nun die Konstruktion verallgemeinern, um die Formel für alle Koeffizienten zu beweisen. Dazu betrachten wir

$$\phi \in \text{Hom}(V_i; V)^G \quad \Leftrightarrow \quad \phi : V_i \xrightarrow{\text{linear}} V, \quad \phi \circ \rho_i(g) = \rho(g) \circ \phi \quad \forall g \in G$$

Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann gilt nach Schur's Lemma:

$$\phi|_U = 0 \quad \text{oder} \quad \phi|_U \quad \text{ist ein Isomorphismus, dann gilt} \quad \dim U = \dim V_i.$$

Invariante Homomorphismen $\phi_{j=1}^{m_i}$, die V_i isomorph auf einen Unterraum U_j abbilden, sodass $U_j \cap U_l = 0$ für $j \neq l$, bilden eine Basis von $\text{Hom}(V_i; V)^G$.
 $\Rightarrow \dim \text{Hom}(V_i; V)^G = m_i$

Aber $\text{Hom}(V_i; V) \simeq V_i^* \otimes V$, also können wir $\varphi_{\rho_i^* \otimes \rho} \in \text{End}(V_i^* \otimes V)$ für das Tensorprodukt der adjungierten der irreduziblen Darstellung ρ_i^* mit ρ definieren:

$$\varphi_{\rho_i^* \otimes \rho} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_i^* \otimes \rho)(g) \quad (3.3.5)$$

Analog zu φ_ρ ist $\varphi_{\rho_i^* \otimes \rho}$ eine Projektion von $\text{Hom}(V_i; V)$ auf $\text{Hom}(V_i; V)^G$ und daher erhalten wir die Projektionsformel.

$$\begin{aligned} m_i &= \dim \text{Hom}(V_i; V)^G = \dim(V_i^* \otimes V)^G = \text{Tr}_{V_i^* \otimes V}(\varphi_{\rho_i^* \otimes \rho}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\text{Tr}_{V_i}(\rho_i(g))} \text{Tr}_V(\rho(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\rho_i}(g)} \chi_\rho(g) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

□

3.3.7 Eigenwertprobleme mit Symmetrie

Wir wenden nun die Gruppentheorie auf Eigenwertprobleme mit Symmetrie an. Diese kommen zum Beispiel in der Molekülphysik und der Festkörperphysik vor, wo das Spektrum von Schwingungsfrequenzen und die Energieniveaus von Elektronen durch die Symmetrie von Molekülen bzw. Kristallen stark eingeschränkt werden.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei $A : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung auf einem komplexen Vektorraum V . Wir nehmen an, dass V der Darstellungsraum einer Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ einer Gruppe G ist und dass A die Symmetrieeigenschaft

$$\rho(g)A = A\rho(g) \quad \forall g \in G$$

besitzt. Also: $A \in \text{Hom}_G(V, V)$.

- Was kann man über die Eigenwerte und Eigenvektoren von A sagen?
- Im Falle wo ρ *irreduzibel* ist, wissen wir nach dem Lemma von Schur, dass $A = \lambda \mathbb{1}_V$, also dass A einen einzigen Eigenwert mit Eigenraum V besitzt.
- Im Folgenden werden wir den allgemeinen Fall betrachten. Wir werden aber zur Vereinfachung annehmen, dass A diagonalisierbar ist, und ρ eine endlichdimensionale Darstellung ist. Also ist ρ vollständig reduzibel.

- Wir benützen die Notation $\text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ um eine diagonale $d \times d$ Matrix mit diagonalen Matrixelementen $a_1 \dots a_d$ zu bezeichnen.

Satz 3.3.7. Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale komplexe Darstellung einer kompakten Gruppe G und $A : V \rightarrow V$ eine diagonalisierbare lineare Selbstabbildung, so dass $\rho(g)A = A\rho(g) \forall g \in G$. Sei $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ eine Zerlegung von V in irreduzible Darstellungen. Dann hat A höchstens n verschiedene Eigenwerte. Bezeichnet d_i die Dimension von V_i , so hat A bezüglich einer passenden Basis die Diagonalform $\text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1 \text{ mal}}, \dots, \underbrace{\lambda_n, \dots, \lambda_n}_{d_n \text{ mal}})$ für gewisse (nicht notwendigerweise verschiedene) komplexe Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
(ohne Beweis)

- Diese qualitative Aussage über die Eigenwerte ist oft für die Anwendungen ausreichend. So können beispielsweise die Schwingungsfrequenzen eines symmetrischen Moleküls durch die Eigenwerte einer linearen Abbildung mit derselben Symmetrie ausgerechnet werden. Die experimentell bestimmbare Anzahl Eigenfrequenzen gibt also Auskunft über die Symmetrie des Moleküls.
- Genaue Aussagen über die Eigenwerte und Eigenvektoren bekommt man mit Hilfe des Lemmas von Schur. Der einfachste Fall ist, wenn die Darstellung in eine Summe paarweiser inäquivalenter Darstellungen zerfällt.
- Das Lemma von Schur gibt dann

Satz 3.3.8. Seien G, V, A wie im Satz 3.3.7. Seien für alle $i \neq j$ die Darstellungen V_i, V_j nicht äquivalent. Dann ist für alle i $AV_i \subset V_i$ und die Einschränkung von A auf V_i ist $A|_{V_i} = \lambda_i \mathbb{1}_{V_i}$ für ein $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

Also ist A bezüglich einer Basis von V mit Basisvektoren in $\bigcup_i V_i$ bereits diagonal. Hier bezeichnet $\bigcup_i V_i$ die Vereinigung von V_i .

Kleine Schwingungen von Molekülen

- Wir betrachten kleine Schwingungen eines Moleküls um eine Gleichgewichtslage. Das Molekül habe N Atome, mit Koordinaten $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{3N}$. Die Gleichgewichtslage y^* soll eine Symmetriegruppe G besitzen, einer Untergruppe der $O(3)$, die die Lage der Atome, bis auf Permutationen der Lagen gleicher Atome, festhält. (Bsp. CH_4 mit Wasserstoffatomen an den Ecken eines regulären Tetraeders mit Symmetriegruppe $T_d \simeq S_4$).
- Die Gruppentheorie ermöglicht es, qualitative Aussagen über die Schwingungsfrequenzen zu machen. Wir betrachten das Molekül im Rahmen der klassischen Mechanik, welche bei kleinen Schwingungen eine gute Näherung der quantenmechanischen Rechnung ist. Die Frequenzen sind durch Experimente im Prinzip gemessen.

- Wir nehmen an, dass die Wechselwirkung nun von den Abständen zwischen den Atomen abhängt, sodass die potentielle Energie invariant unter orthogonalen Transformationen ist:

$$V(R\vec{y}_1, \dots, R\vec{y}_n) = V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n) \quad \forall R \in O(3)$$

- Die Tatsache, dass gleiche Atome in einem Molekül vorkommen, widerspiegelt sich in der Tatsache dass die potentielle Energie invariant unter Permutationen σ der Koordinaten von identischen Atomen ist:

$$V(\vec{y}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{y}_{\sigma(N)}) = V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N).$$

Beide Arten von Symmetrien der potentiellen Energie sind durch *orthogonale* Transformationen von \mathbb{R}^{3N} gegeben.

- Sei $R \in G$: Also bildet R die Gleichgewichtslage y^* bis auf eine Permutation von gleichen Atomen nach sich selbst. Setzt man also R mit einer solchen Permutation zusammen, so erhalten wir eine orthogonale Transformation $\rho(R)$ von \mathbb{R}^{3N} , mit $\rho(R)y^* = y^*$:

$$\rho(R)(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N) = (R\vec{y}_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, R\vec{y}_{\sigma^{-1}(N)}),$$

wobei σ durch $R\vec{y}_i^* = \vec{y}_{\sigma(i)}^*$ definiert ist.

Mann kann zeigen, dass ρ die Darstellungseigenschaft $\rho(R_1 R_2) = \rho(R_1)\rho(R_2)$ erfüllt.

- Somit haben wir eine (reelle) Darstellung ρ auf \mathbb{R}^{3N} , mit den Eigenschaften, dass $V(\rho(R)y) = V(y)$, $\forall R \in G$, $\forall y \in \mathbb{R}^{3N}$ und $\rho(R)y^* = y^*$.
- Die Newton'schen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten $\vec{y}_i = (y_i^1, y_i^2, y_i^3)$ der Atome als Funktion der Zeit t haben die Form

$$m_i \frac{d^2 y_i^\alpha(t)}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial y_i^\alpha}(y(t))$$

mit $i = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, 2, 3$ und mit $m_i > 0$ als Masse des i ten Atoms.

Im Gleichgewicht verschwindet die Kraft $\frac{\partial^2 V(y^*)}{\partial y_i^\alpha} = 0$. Für kleine Schwingungen setzt man: $y(t) = y^* + x(t)$ und entwickelt in einer Taylorreihe um $x = 0$. Entsprechend erhält man:

$$m_i \frac{d^2 x_i^\alpha(t)}{dt^2} = - \sum_{j, \beta} \frac{\partial V}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta}(y^*) x_j^\beta(t) + \mathcal{O}(|x|^2)$$

Vernachlässigt man Terme zweiter und höherer Ordnung haben die Bewegungsgleichungen die Form:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -Ax(t)$$

Die $3N \times 3N$ Matrix A hat Matrixelemente $m_i \partial^2 V(y^*) / \partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta$. Diese Matrix ist ähnlich zur symmetrischen Matrix $(m_i^{-1/2} \partial^2 V(y^*) / \partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta m_j^{1/2})$, also diagonalisierbar. Die Symmetrie $V(\rho(R)y) = V(y)$ der potentiellen Energie hat zur Folge, dass die orthogonale Matrix $\rho(R)$ die Gleichung

$$\rho(R)A = A\rho(R)$$

erfüllt. Der Exponentialansatz $x(t) = e^{i\omega t} x_0$ zur Lösung der Bewegungsgleichung führt auf das Eigenwertproblem $Ax_0 = \omega^2 x_0$. Ist also ω ein positiver Eigenwert von A , so sind Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung $x(t)$ Lösungen, die Schwingungen der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ um die Gleichgewichtslage beschreiben.

Die positive Wurzel ω aus den positiven Eigenwerten von A werden Eigenfrequenzen des Moleküls genannt.

- Die Gruppentheorie gibt Auskunft über die Entartung der Eigenwerte: Zerlegt man nämlich die als komplexe Darstellung aufgefasste Darstellung ρ in irreduzible Darstellungen, so entspricht jede irreduzible Unterdarstellung einem Eigenwert mit Multiplizität gleich der Dimension dieser irreduziblen Darstellung.
- Ist also die, durch experimentelles Bestimmen der Eigenfrequenzen gewonnene, Anzahl Eigenwerte kleiner als die Anzahl Freiheitsgrade, so ist das ein Zeichen dass das Molekül eine nichtabelsche Symmetriegruppe besitzt. Um die irreduziblen Darstellungen zu bestimmen rechnet man den Charakter $tr(\rho(R))$ aus und entwickelt ihn nach aus Tafeln gewonnenen Charakteren von irreduziblen Darstellungen.

Beispiel: Eigenfrequenzen von CH_4 (Methan)

- Anwendung: Qualitative Aussagen über die Eigenfrequenzen eines Moleküls mit tetrahedraler Symmetrie, wie CH_4 . Im Gleichgewicht sind die vier Wasserstoffatome H an den Ecken $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$ eines regulären Tetraeders, wobei der Kohlenstoff C im Mittelpunkt steht.
- Wir betrachten das System klassisch und nehmen an, dass die potentielle Energie $V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_4, \vec{y}_C)$ als Funktion der Koordinaten $\vec{y}_i \in \mathbb{R}^3$ der H-Atome und \vec{y}_C des C-Atoms invariant unter orthogonalen Transformationen und Permutationen der Koordinaten der H-Atome ist:

$$\begin{aligned} V(R\vec{y}_1, \dots, R\vec{y}_4, R\vec{y}_C) &= V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_4, \vec{y}_C) \forall R \in O(3) \\ V(\vec{y}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{y}_{\sigma(4)}, \vec{y}_C) &= V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_4, \vec{y}_C) \forall \sigma \in S_4 \end{aligned}$$

- Betrachten von kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage: Wir wählen die Gleichgewichtslage so, dass der Mittelpunkt des Tetraeders im Ursprung liegt. Dann ist $\sum_i^4 \vec{v}_i = 0$. Die Symmetriegruppe ist die Gruppe Γ der orthogonalen Transformationen, die den regulären Tetraeder fest lassen.

Die Tetraedergruppe Γ hat fünf irreduzible Darstellungen ρ_1, \dots, ρ_5 . Ihre Charakteren $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ sind durch folgende Charaktertafel gegeben:

24Γ	[1]	$8 [r_3]$	$3 [r_2]$	$6 [S_4]$	$6 [\tau]$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	2	-1	2	0	0
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	3	0	-1	1	-1
χ_5	3	0	-1	-1	1

mit:

- 1 : Identität
- r_3 : Drehung um eine Achse durch eine Ecke mit Winkel $2\pi/3 = 120^\circ$
- r_2 : Drehung um eine Achse, die senkrecht durch eine Kante geht mit Winkel $2\pi/2 = 180^\circ$
- S_4 : Zusammensetzung einer 120° – Drehung r_3 um eine Achse durch eine Ecke und den Mittelpunkt mit einer Spiegelung um eine Ebene die durch zwei andere Ecken und durch den Mittelpunkt geht (oder Drehung um 90° eine Achse und Spiegelung an der Ebene senkrecht dazu).
- τ : Spiegelung bezüglich einer durch eine Kante und den Mittelpunkt gehende Ebene

Die entsprechenden Permutationen der Ecken 1, 2, 3, 4 und des Mittelpunktes C sind (für eine Wahl der Achsen und Ebenen):

$$\begin{aligned}
 r_3 & : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & C \\ 1 & 3 & 4 & 2 & C \end{pmatrix} \\
 r_2 & : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & C \\ 2 & 1 & 4 & 3 & C \end{pmatrix} \\
 S_4 & : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & C \\ 4 & 1 & 2 & 3 & C \end{pmatrix} \\
 \tau & : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & C \\ 1 & 2 & 4 & 3 & C \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wir müssen also den Charakter $tr(\rho(R))$ für $R = 1, r_3, r_2, S_4, \tau$ ausrechnen. Insgesamt gibt es $N = 5$, d.h. $\rightarrow 3N = 15$ Freiheitsgrade, also ist ρ eine 15×15 Matrix. Wir reduzieren zunächst das Problem auf die Rechnung der Spur der 3×3 Matrix

R . Betrachte zum Beispiel $\rho(R)$ für $R = \tau$. Die entsprechende Permutation σ ist die Transposition der beiden letzten Ecken. Also hat $\rho(R)$ die Zerlegung in 3×3 Kästchen:

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix}$$

Die Spur ist also $= 3 \operatorname{tr}(R)$, denn nur die Kästchen R in den Diagonalen tragen zur Spur bei.

- Die Anzahl Kästchen in der Diagonale ist die Anzahl $i \in \{1, \dots, 4, C\}$, so dass $\sigma(i) = i$ (also der Fixpunkt der entsprechenden Permutation). Allgemein haben wir die Fixpunktformel

$$\chi_\rho(R) = \operatorname{tr}(\rho(R)) = \operatorname{tr}(R)N_R,$$

wobei N_R die Anzahl der Fixpunkte der R entsprechenden Permutationen ist.

- Rechnung von $\operatorname{tr}(R)$: Eine Drehung mit Winkel θ hat bezüglich einer geeigneten Basis die Matrixform:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also $\operatorname{tr}(R) = 2 \cos \theta + 1$. Insbesondere ist $\operatorname{tr}(r_3) = 2 \cos(120^\circ) + 1 = 0$ (d.h. R entspricht r_3). Es ist $\operatorname{tr}(r_2) = -1$ mit $\theta = \phi$ (Spiegelung $\Rightarrow 1, 1, -1 \Rightarrow \operatorname{tr}(\tau) = 1$). Weiterhin findet man (ohne Beweis): $\operatorname{tr}(S_4) = -1$ und für N_R :

- $N_1 = 5$
- $N_{r_3} = 2$
- $N_{r_2} = 1$
- $N_{S_4} = 1$
- $N_\tau = 3$

Entsprechend erhält man:

$$\begin{aligned} \chi_\rho(1) &= 15 \text{ (da } 3 \times 5 = 15) \\ \chi_\rho(r_3) &= 0 \times 2 = 0 \\ \chi_\rho(r_2) &= -1 \times 1 = -1 \\ \chi_\rho(S_4) &= -1 \times 1 = -1 \\ \chi_\rho(\tau) &= 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

- Wir können jetzt berechnen, wie oft die irreduziblen Darstellungen in ρ vorkommen. Die Multiplizität n_j , mit welcher die j -te Darstellung vorkommt, ist der Koeffizient von χ_j in der Zerlegung $\chi_\rho = \sum_j n_j \chi_j$. Aus der Orthogonalitätsrelation der Charakteren haben wir also mit $|G| = 24$:

$$n_j = (\chi_\rho, \chi_j) = \frac{1}{24} [1 \cdot 15\chi_j(1) + 8 \cdot 0\chi_j(r_3) + 3 \cdot (-1)\chi_j(r_2) + 6 \cdot (-1)\chi_j(S_4) + 6 \cdot 3\chi(\tau)]$$

Diese Zahlen können mit Hilfe der Charaktertafel einfach berechnet werden, mit dem Resultat

$$\chi_\rho = \chi_1 + \chi_2 + \chi_4 + 3\chi_5$$

Also haben wir eine Zerlegung in irreduzible Darstellungen $\rho \simeq \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_4 \oplus \rho_5 \oplus \rho_5 \oplus \rho_5$. Die Eigenwerte sind also höchstens 6 (anstatt 15 entsprechend der Freiheitsgrade).

- Nicht alle diese Eigenwerte entsprechen Schwingungen, denn manche verschwinden wegen der Transformations- und Drehinvarianz der Gleichungen. Man hat nämlich die Transformationsinvarianz

$$V(\vec{y}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{y}_n + \vec{a}) = V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$$

des Potentials. Starre Drehung und Translation bilden einen 6-dimensionalen invarianten Unterraum von \mathbb{R}^{15} , der im Eigenraum von A zum Eigenwert 0 liegt.

- Man findet, dass die Einschränkung der Darstellung ρ auf diesen Unterraum Charakter $\chi_4 + \chi_5$ hat. Auf dem orthogonalen Komplement hat ρ dann Charakter $\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_5$. Also hat CH_4 (höchstens) 4 verschiedenen Eigenfrequenzen.
- Die entsprechende Eigenschwingung kann man (teils) auch ohne explizite Ausrechnung erraten. Zum Beispiel kann man sich vorstellen, dass der Tetraeder "atmet", d.h die H-Atomen bewegen sich auf Geraden durch den Ursprung, wobei C ruht, so dass der Abstand zum Ursprung zu jedem Zeitpunkt für alle H-Atome gleich ist. Diese Verschiebungen von der Gleichgewichtslage werden durch die Symmetrie auf sich selbst abgebildet. Also entspricht dies der trivialen Unterdarstellung $\rho_1(\chi_1)$. Insgesamt:

$$\begin{aligned} \chi_1 &\rightarrow 1 \text{ EW} \\ \chi_2 &\rightarrow 2 \text{ entartete EW} \\ 2 \times \chi_5 &\rightarrow 2 \times 3 \text{ entartete EW} \end{aligned}$$

d.h. 9 EW + 6 (3 Transformationen + 3 Drehungen mit EW = 0).

3.4 Kontinuierliche Gruppen und ihre Darstellungen

3.4.1 Die Gruppe aller Drehungen eines Kreises

- Gruppe mit einzigem Parameter t (modulo 2π): Drehung wird dargestellt durch $a(t)$. Die Zusammensetzung der Drehungen kann geschrieben werden als:

$$a(t_1)a(t_2) = a(t_1 + t_2) = a(t_2)a(t_1),$$

ist also abelsch.

- Die Gruppe ist isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen modulo 2π .
- Die Gruppe wird erzeugt durch eine *infinitesimale Transformation*
- Die *identische Darstellung* der Gruppe ist die Darstellung durch sich selbst:

$$\begin{aligned} a(t) &\rightarrow \text{Drehung der Ebene um } t \\ a(t) &\rightarrow \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = A(t) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} A(t_1)A(t_2) &= A(t_1 + t_2) \\ A(-t) &= [A(t)]^{-1} \end{aligned}$$

Charakter

$$\text{tr} A = 2 \cos t = \chi(t).$$

Wir hatten in 3.3.2 gesehen, dass wenn ρ eine irreduzible Darstellung ist und χ_ρ ihre Charakteren sind, so gilt:

$$(\chi_\rho, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\rho(g)} \chi_\rho(g) = 1$$

Analog führt man folgendes Skalarprodukt ein:

$$(f_1, f_2) = \int_G \overline{f_1(g)} f_2(g) dg,$$

mit Integration über die konstanten Gruppenelemente. Also gilt:

$$\begin{aligned}
 (\chi(t), \chi(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\chi(t)} \chi(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\chi(t)|^2 dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Wäre die Darstellung $A(t)$ irreduzibel, so hätte man 1 erwartet.

Da die Gruppe abelsch ist, sind die irreduziblen Darstellungen von Grad 1. Zur Ausreduktion lösen wir das *Eigenwertproblem* der allgemeinen Matrix A :

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} \cos t - \lambda & -\sin t \\ \sin t & \cos t - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
 &= (\cos t - \lambda)^2 + \sin^2 t \\
 &= (\cos t - \lambda)^2 - (i \sin t)^2 \\
 &= (\cos t - \lambda + i \sin t) (\cos t - \lambda - i \sin t) \\
 &= (e^{it} - \lambda) (e^{-it} - \lambda)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = e^{it}, \lambda_2 = e^{-it}$$

Eigenvektoren: Zu $\lambda_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ Und zu $\lambda_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ unabhängig von t . Die Basisvektoren sind $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Reduzible Darstellung $a(t) \rightarrow \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$

Betrachte: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(0)$

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t + dt) &= A(t + dt) \vec{x}(0) \\
 d\vec{x} &= (\vec{x}(t + dt) - \vec{x}(t)) = \underbrace{[A(t + dt) - A(t)]}_{A(t)[A(dt) - \mathbb{1}]} \vec{x}(0)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 A(t + dt) &= A(t)A(dt) \\
 &= [A(dt) - \mathbb{1}] \underbrace{A(t)\vec{x}(0)}_{\vec{x}(t)}
 \end{aligned}$$

folglich:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{A}\vec{x}(t)$$

Bemerkung: $A(0) = \mathbb{1}$

Definition 3.4.1.

$$\dot{A}(0) = \left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

ist die *infinitesimale Transformation der einparametrischen kontinuierlichen Gruppe* $A(t)$

Es ist

$$\frac{A(t+dt) - A(t)}{dt} = \frac{A(t)A(dt) - A(t)}{dt} = \frac{A(t)(A(dt) - \mathbb{1})}{dt} \rightarrow A(t)\dot{A}(0)$$

mit $\dot{A}(0) = U$, dabei ist die Matrix die infinitesimale Transformation:

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

und

$$U = \dot{A}(0) = \begin{pmatrix} -\sin 0 & -\cos 0 \\ \cos 0 & -\sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Konstruktion von $A(t)$ aus U : **erste Methode**). Es ist $A(0) = \mathbb{1}$, das heisst

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = U\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

mit $x(0)$ und $y(0)$ gegeben. Danach erhält man $\vec{x}(t)$ durch

$$\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(0)$$

→ somit erhält man $A(t)$.

Zweite Methode

Taylor-Entwicklung $\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{t}{1!}\dot{\vec{x}}(0) + \frac{t^2}{2!}\ddot{\vec{x}}(0) + \dots$

$\dot{\vec{x}} = A(0)\vec{x}$ also $\dot{\vec{x}}(0) = U\vec{x}(0)$ (U ist konstant). Weiter ist $\ddot{\vec{x}}(0) = U\dot{\vec{x}} = U^2\vec{x}(0)$ usw. Also gilt:

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\left[\mathbb{1} + \frac{1}{1!}tU + \frac{1}{2!}t^2U^2 + \frac{1}{3!}t^3U^3 \right]}_{=A(t)} \vec{x}(0)$$

$$\Rightarrow A(t) = \mathbb{1} + \frac{t}{1!}U + \frac{t^2}{2!}U^2 + \dots = e^{tU}$$

Nach Cayley-Hamilton

Jede $n \times n$ Matrix erfüllt ihre eigene charakteristische Gleichung. Die charakteristische Gleichung von U ist:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Nach Cayley-Hamilton gilt: $U^2 + \mathbb{1} = 0$ ($0 =$ Nullmatrix) Somit gilt: $U^2 = -\mathbb{1}$, $U^3 = -U$, $U^4 = \mathbb{1}$, $U^5 = U$ usw. Eingesetzt in die Taylor-Reihe:

$$\begin{aligned} A(t) &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) \mathbb{1} + \left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right) U \\ &= \cos t \mathbb{1} + \sin t U \\ &= e^{tU} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sei $Mat(n\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , der Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen mit Elementen in \mathbb{K} .

Lemma 3.4.1. Die Reihe $\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$ konvergiert absolut für alle $x \in Mat(n, \mathbb{K})$.

Lemma 3.4.2. Seien $X, Y \in Mat(n, \mathbb{K})$ für ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}). Dann gilt

- $\exp(X) \exp(Y) = \exp(X + Y)$, falls $XY = YX$
- $\exp(X)$ ist invertierbar: $(\exp(X))^{-1} = \exp(-X)$
- $A \exp(X) A^{-1} = \exp(AXA^{-1})$, $A \in GL(n, \mathbb{K})$
- $\det(\exp(X)) = \exp(\text{Tr}(X))$
- $\exp(X^*) = (\exp X)^*$, $\exp(X^T) = (\exp X)^T$

Die Abbildung $Mat(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$, $X \rightarrow \exp(X)$ heisst **Exponentialabbildung**.

Satz 3.4.1. Für alle $X \in Mat(n, \mathbb{K})$ ist $t \mapsto \exp(tX)$ eine Einparametergruppe. Alle Einparametergruppen sind von dieser Form.

Definition 3.4.2. X heisst **infinitesimaler Erzeugender** der Einparametergruppe $t \mapsto \exp(tX)$ ($\mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$, $t \mapsto X(t)$)

Wie im Beispiel gesehen gilt

$$X(t) = \exp\left(t\dot{X}(0)\right)$$

Zum Beispiel zum dritten Punkt in Lemma 3.4.2 gilt

$$\begin{aligned} A \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x^j}{j!}\right) A^{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Ax^j A^{-1}}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(AXA^{-1})^j}{j!} \\ &= \exp(AXA^{-1}) \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$AX^j A^{-1} = AX \underbrace{XX \dots X}_{A^{-1}A} A^{-1} = (AXA^{-1})^j$$

3.4.2 Die Gruppe aller Drehungen einer Kugelfläche

- Drehungen: $SO_3 = \{\text{Orthogonale } 3 \times 3 \text{ Matrizen mit } \det = +1\}$

- Jede Drehung \Leftrightarrow Vektor $t\vec{u} \begin{cases} \vec{u} & : \text{Einheitsvektor} \\ t & : \text{Drehwinkel} \end{cases}$

Einparametrische Untergruppen: zum Beispiel Drehung um die z-Achse $\vec{x}(t) = A(t)\vec{x}(0)$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit $\dot{\vec{x}} = U\vec{x}$ ist U die infinitesimale Erzeugende (oder Transformation) dieser 1-parametrischen Untergruppe:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

U ist eine singuläre Matrix (d.h. $\det U = 0$).

- Einparametrische Untergruppe mit beliebigen festen Drehvektoren $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

(falls wir die z-Achse betrachten, gilt $\vec{u} = (0, 0, u_3)$) $\dot{\vec{x}} = \vec{u} \times \vec{x}$ oder $\dot{\vec{x}} = U\vec{x}$ mit

$$U = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Schief-Symmetrische Matrix}},$$

wobei $\det U = 0$.

- Die infinitesimale Erzeugende der Kugeldrehgruppe SO_3 sind die schiefsymmetrischen Matrizen (für diese gilt: $M^T = -M$).
- Es gilt $A(t) = e^{tU} = \mathbb{1} + U \sin t + U^2(1 - \cos t)$ (Euler'sche Drehformel).

Bemerkung 3.4.1.

- Die infinitesimalen Transformationen (oder Erzeugenden) bilden einen linearen Raum $aM + bN$, der wiederum schiefsymmetrisch ist (nicht aber die Matrizen der Gruppe).
- Die Matrizen der Gruppe müssen alle regulär ($\det \neq 0$) sein, nicht aber die Matrizen der infinitesimalen Transformationen.

Kommutator zweier infinitesimalen Transformationen U, V

Definition 3.4.3. Der **Kommutator** ist definiert durch

$$[U, V] = UV - VU$$

Lemma 3.4.3. Sind U, V die infinitesimalen Transformationen von zwei einparametrischen Untergruppen (z.B. von SO_3) der Gruppe, dann ist auch $[U, V]$ eine einparametrische Untergruppe.

Beweis. Im Falle von SO_3 wo U schiefsymmetrische Matrizen sind und es gilt:

$$\begin{aligned} U^T &= -U \\ V^T &= -V \quad \Rightarrow \quad [U, V]^T = -[U, V] \end{aligned}$$

□

Weiter erfüllen die infinitesimalen Transformationen die **Jacobi Identität**

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = O,$$

wobei O die Nullmatrix darstellt.

Es gelten also folgende Eigenschaften

- $[\lambda X, \nu Y, Z] = \lambda [X, Z] + \nu [Y, Z]$ mit $\lambda, \nu \in \mathbb{K}$ (\mathbb{R} oder \mathbb{C})
Bildung von Linearkombinationen
- $[X, Y] = -[Y, X]$
- Jacobi Identität

Definition 3.4.4. Ein reeller oder komplexer Vektorraum \tilde{g} , versehen mit einer **Lie-Klammer** $[\cdot, \cdot] : \tilde{g} \times \tilde{g} \rightarrow \tilde{g}$, welche die obigen Eigenschaften hat, heisst (reelle oder komplexe) **Lie-Algebra**.

Zum Beispiel sind die infinitesimalen Transformationen von SO_3 eine Lie-Algebra

Bemerkung 3.4.2. Eine Lie-Algebra ist im Allgemeinen keine Algebra im üblichen Sinne: An die Stelle des Assoziativgesetzes bezüglich dem Operator $[\cdot, \cdot]$ tritt die Jacobi-Identität.

Ein Homomorphismus $\phi : \tilde{g}_1 \rightarrow \tilde{g}_2$ von Lie-Algebren \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 ist eine lineare Abbildung mit $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y])$. Bijektive Homomorphismen heissen Isomorphismen.

Definition 3.4.5. Eine (Matrix-) **Lie-Gruppe** ist eine abgeschlossene Untergruppe G von $GL(n, \mathbb{K})$ mit $G \subset GL(n, \mathbb{K})$. Abgeschlossen heisst, dass für alle konvergenten Folgen X_j in $GL(n, \mathbb{K})$, $X_j \in G \forall j \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} X_j \in G$. Lie-Gruppen sind spezielle kontinuierliche Gruppen.

Das Gruppenelement $R(a)$ hängt von r reellen a^1, \dots, a^r ab:

$$R(a) = R(a^1, \dots, a^r)$$

Die Parameter a^ρ variieren auf einem endlichen oder unendlichen Bereich. Der Raum der r -Parameter ist der Raum der Gruppenparameter. Eine Gruppe G ist eine Lie-Gruppe der Ordnung r , falls $R(a)$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Es existiert ein neutrales Element $R(0)$, so dass

$$R(0)R(a) = R(a)R(0) = R(a).$$

- Für jedes a gibt es ein \bar{a} , so dass

$$R(a)R(\bar{a}) = R(\bar{a})R(a) = R(0),$$

d.h. $R(\bar{a}) = R(a)^{-1}$ ist das inverse Element.

- Kompositionsgesetz der Gruppenparameter: Für gegebene Parameter a, b existiert ein Parameter c mit

$$R(c) = R(b)R(a),$$

wobei die Parameter c reelle Funktionen der Parameter a, b sind:

$$c = \phi(a, b)$$

Zudem sind die Parameter c analytische Funktionen von a, b .

- Assoziativität:

$$R(a) [R(b)R(c)] = [R(a)R(b)] R(c)$$

und

$$\phi(\phi(c, b), a) = \phi(c, \phi(b, a))$$

Eine Lie-Gruppe heisst **kompakt** falls die Parameter beschränkt sind.

Sei $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, \mathbb{K})$. Man definiert

$$Lie(G) = \{X \in Mat(n, \mathbb{K}) \mid \exp(tX) \in G \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

$Lie(G)$ heisst **Lie-Algebra** der Lie-Gruppe G . (Siehe auch Definition zuvor. Beide sind äquivalent.)

Beispiel 3.4.1.

$$\begin{aligned} Lie(U(n)) &= u(n) \\ Lie(SU(n)) &= su(n) \\ u(n) &= \{X \in Mat(n, \mathbb{C} \mid X^* = -X\} \\ su(n) &= \{X \in Mat(n, \mathbb{C} \mid X^* = -X, trX = 0\} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $su(2) = \{X \in Mat(2, \mathbb{C} \mid X^* = -X, trX = 0\}$.

Eine Basis ist durch die Pauli-Matrizen gegeben:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \sigma_i &: \text{Pauli-Matrizen} \\ t_1 = i\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} & t_2 = i\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ t_3 = i\sigma_3 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt $[t_j, t_k] = -\sum_{l=1}^3 2\epsilon_{jkl}t_l$ ($\epsilon_{123} = 1$ und ϵ_{ijk} ist antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes).

Beispiel 3.4.2.

$$\begin{aligned} \text{Lie}(O(n)) &= o(n) \\ \text{Lie}(SO(n)) &= so(n) \\ o(n) = so(n) &= \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid X^T = -X\} \end{aligned}$$

Beweis. Sei $X \in so(n)$. Dann gilt $\forall t \in \mathbb{R}$ ($\exp(tX) \in SO(n)$)

$$\begin{aligned} \underbrace{\exp(tX)^T}_{\in SO(n)} \exp(tX) &= \mathbb{1} \\ &= \exp(tX^T) \exp(tX), \end{aligned}$$

denn es gilt $A^T A = \mathbb{1}$ für ein $A \in SO(n)$. Nach Ableitung nach t an der Stelle 0 folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} (\exp(tX^T) \exp(tX)) \right|_{t=0} &= X^T \exp(tX^T) \exp(tX) + \exp(tX^T) X \exp(tX) \\ &= X^T + X \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit gilt $X^T = -X$. □

Die Dimension von $so(n)$ ist $\frac{1}{2}(n^2 - n)$. So ist also zum Beispiel

$$\dim(so(2)) = 1$$

mit der Basis

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} \dim(so(3)) &= 3 \\ X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & X_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese erfüllen die Kommutationsbeziehungen $[\cdot, \cdot]$:

$$[X_1, X_2] = X_3$$

(zyklisch in 1,2,3)

Bemerkung 3.4.3. $J_x = iX_1, J_y = iX_2, J_z = iX_3$; damit ist $[J_x, J_y] = iJ_z$ und zyklisch in x, y, z . $J_{x,y,z}$ entsprechen den 3 Komponenten des Drehimpulses.

$$R_x(\alpha) = e^{-i\alpha J_x}, \quad R_y(\beta) = e^{-i\beta J_y}, \quad R_z(\gamma) = e^{-i\gamma J_z}$$

Wobei R_x die Drehung um α um die Achse x ist ($\beta \rightarrow$ Achse $y, \gamma \rightarrow$ Achse z).

$$\begin{aligned} R_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ R_y(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \\ R_z(\gamma) &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.4.4.

$$\begin{aligned} R(\alpha, \beta, \gamma) &= e^{-i\alpha J_x} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \\ &\neq e^{-i(\alpha J_x + \beta J_y + \gamma J_z)} \end{aligned}$$

da J_x, J_y nicht kommutieren.

3.4.3 Die Campell-Baker-Hausdorff Formel (CBH)

Satz 3.4.2. Seien $X, Y \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$. Für t klein genug gilt

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp\left(tX + tY + \frac{t^2}{2} [X, Y] + \mathcal{O}(t^3)\right)$$

Bemerkung 3.4.5. Man kann zeigen (und dies ist die vollständige Fassung des CBH-Satzes), dass für kleine t

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t^k Z_k\right)$$

wobei Z_k eine Linearkombination von k -fachen Kommutatoren ist, d.h. von Ausdrücken der Operatoren $[X, \cdot]$ und $[Y, \cdot]$ erzeugt wird. Zum Beispiel gilt:

$$Z_2 = \frac{1}{2} [X, Y], \quad Z_3 = \frac{1}{12} ([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]])$$

Also bestimmt die Lie-Algebra die Umgebung des Einselementes in der Gruppe.

3.4.4 Darstellungen von Lie-Gruppen

Definition 3.4.6. Unter einer **Darstellung einer Lie-Gruppe** G auf einem (reellen oder komplexen) endlichdimensionalen Vektorraum $V (\neq 0)$ versteht man stets einen stetigen Homomorphismus $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Stetigkeit bedeutet, dass die Matrixelemente von $\rho(g)$ bezüglich einer beliebigen Basis stetig von $g \in G$ abhängen. Eine Darstellung heisst komplex oder reell, wenn V ein komplexer bzw. reeller Vektorraum ist. Die Dimension einer Darstellung ist die Dimension des Darstellungsraumes V .

Lemma 3.4.4. Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer Lie-Gruppe G . Dann bildet ρ Einparametergruppen nach Einparametergruppen ab. (Ohne Beweis)

Man definiert

$$\rho_*(X) = \underbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(\exp(tX))}_{\in \text{Lie}(GL(V)) = \mathfrak{gl}(V)},$$

ρ_* ist eine Abbildung $\text{Lie}(G) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Lemma 3.4.5.

1. $\rho(\exp(tX)) = \exp(t\rho_*(X)), \quad t \in \mathbb{R}, X \in \text{Lie}(G)$
2. $\rho_*(\lambda X + \mu Y) = \lambda\rho_*(X) + \mu\rho_*(Y), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, X, Y \in \text{Lie}(G)$
3. $\rho_*([X, Y]) = [\rho_*(X), \rho_*(Y)], \quad X, Y \in \text{Lie}(G)$

(Ohne Beweis)

Definition 3.4.7. Sei \tilde{g} eine Lie-Algebra über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Eine **Darstellung** von \tilde{g} auf einem Vektorraum $V \neq 0$ ist eine \mathbb{R} - (bzw. \mathbb{C}) lineare Abbildung $\tau : \tilde{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, so dass

$$[\tau(X), \tau(Y)] = \tau([X, Y]).$$

Invariante Unterräume, Irreduzibilität und vollständige Reduzibilität werden genau wie bei Gruppen definiert. Darstellungen heissen komplex bzw. reell, je nachdem ob V komplex oder reell ist.

Satz 3.4.3. Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung der Lie-Gruppe G . Dann ist ρ_* eine Darstellung der reellen Lie-Algebra $\text{Lie}(G)$. Die Einschränkung von ρ auf die Einskomponente G_0 von G ist eindeutig durch ρ_* bestimmt.

Definition 3.4.8. Als **Einskomponente** versteht man die Gruppe aller Matrizen der Formel

$$\exp(X_1) \dots \exp(X_k), \quad X_1, \dots, X_k \in \tilde{g} \text{ mit } k \geq 1$$

Dabei gilt:

$$\rho(\exp X_1 \dots \exp X_k) = \exp(\rho_*(X_1)) \dots \exp(\rho_*(X_k))$$

Satz 3.4.4. Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G . Dann ist ρ genau dann irreduzibel (bzw. vollständig reduzibel), wenn ρ_* irreduzibel (bzw. vollständig reduzibel) ist. (Ohne Beweis)

Beispiel 3.4.3. Triviale Darstellung: $V = \mathbb{C}$, $\rho_*(X) = 0 \forall X \in \tilde{\mathfrak{g}}$

Beispiel 3.4.4. Adjungierte Darstellung. Sei $Ad : G \rightarrow GL(\tilde{\mathfrak{g}})$, $Ad(g)X = gXg^{-1}$, die adjungierte Darstellung von G auf $\tilde{\mathfrak{g}} = Lie(G)$. Die adjungierte Darstellung von $\tilde{\mathfrak{g}}$ ist $\rho_* = ad = Ad_*$:

$$ad(X)Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \underbrace{\exp(tX)}_g Y \underbrace{\exp(-tX)}_{g^{-1}} = [X, Y]$$

Diese reelle Darstellung spielt eine wichtige Rolle in der Physik der fundamentalen Wechselwirkungen, sowie in der Lie Theorie.

4 Laplace-Transformation

Es sei $f \in L^1([0, \infty])$. Die Laplace-Transformation $\mathfrak{L}f$ ist definiert durch

$$\mathfrak{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (\operatorname{Re}(s) \geq 0) \quad (4.0.1)$$

Für $\operatorname{Re}(s) > 0$ ist überdies $\mathfrak{L}f(s)$ holomorph. Bei der Ableitung von $\mathfrak{L}f$ darf man unter dem Integral differenzieren. Falls $f, G \in L^1$, so folgt

$$\mathfrak{L}(af(s) + bG(s)) = a\mathfrak{L}f(s) + b\mathfrak{L}G(s).$$

Also ist \mathfrak{L} linear.

Inversionsformel

Um eine Umkehrformel zu finden, fassen wir die Gleichung (4.0.1) als Fourier-Transformation auf. Dazu setzen wir $f(x) = 0$ für $x < 0$, wodurch die Funktion f zu einer Funktion in $L^1(\mathbb{R})$ fortgesetzt wird. Diese Funktion bezeichnen wir ebenfalls mit f . Weiter schreiben wir die Gleichung (4.0.1) mit $s = \sigma + i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathbb{R}$) folgendermassen:

$$(\mathfrak{L}f)(\sigma + i\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau x} e^{-\sigma|x|} f(x) dx \quad (4.0.2)$$

(für $x < 0$ ist $f = 0$).

Für feste $\sigma \geq 0$ ist dies, bis auf $\sqrt{2\pi}$, die Fourier-Transformation von $e^{-\sigma|x|} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. (bis auf Existenzprobleme) Für ein $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ folgt deshalb mit der Fourier-Inversionsformel aus der Gleichung (4.0.2)

$$e^{-\sigma|x|} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{i\tau x} (\mathfrak{L}f)(\sigma + i\tau).$$

Speziell für $f(x) = 0$ mit $x < 0$ ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{(\sigma+i\tau)x} (\mathfrak{L}f)(\sigma + i\tau),$$

oder mit $s = \sigma + i\tau$ ($ds = i d\tau$, $\tau \rightarrow \pm\infty$, $s = \sigma \pm i\infty$).

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} (\mathfrak{L}f)(s) ds \quad (\sigma > 0) \quad (4.0.3)$$

Ein Anfangs Randwertproblem

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta u \tag{4.0.4}$$

im Halbraum $x_1 \geq 0$ und suchen die Lösungen, welche folgende Bedingungen erfüllen:

1. Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = f(x_1) \tag{4.0.5}$$

$$(x = (x_1, x_2, x_3)) \tag{4.0.6}$$

2. Randbedingung:

$$u(x_1 = 0, t) = \omega(t) \tag{4.0.7}$$

Dabei sind f und ω gegebene Funktionen. Die Lösung hängt nicht von x_2 und x_3 ab (Symmetrie). Also fassen wir dieses Problem als Problem der 1-dimensionalen Wärmeleitung für das Integral $[0, \infty)$ auf (Variablen $x_1, t \rightarrow$ setze $x_1 = x$). Die Methode der Laplace-Transformation ist hier sehr geeignet. Wir haben gesehen (im Komplexen, über Fouriertransformationen), dass die Lösung der Gleichung

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{mit} \quad u(x, 0) = f(x) \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n$$

gegeben ist (mit $n = 1$, d.h $x \in \mathbb{R}$) als

$$u_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

Betrachten wir also statt u die Funktion $v := u - u_0$, so erfüllt v die Bedingungen

$$\begin{cases} \partial_t v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = \omega(t) - u_0(0, t) =: g(t) \end{cases} \tag{4.0.8}$$

($f(x)$ sei gleich 0 für $x < 0$). Es sei $\tilde{v}(x, s)$ die (partielle) Laplace-Transformierte in der Zeit:

$$\tilde{v}(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} v(x, t) dt. \tag{4.0.9}$$

Mit der obigen Gleichung (4.0.9) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(\partial_t v) &= \int_0^\infty e^{-st} \partial_t v(x, t) dt \\
&= \underbrace{e^{-st} v \Big|_0^\infty}_{=0} + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} v(x, t) dt}_{\tilde{v}(x, s)} \\
&= s \tilde{v}(x, s)
\end{aligned}$$

Damit gibt die Gleichung (4.0.9):

$$\begin{aligned}
&\left(\mathfrak{L}(\partial_t v) = \mathfrak{L}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \right) \\
s \tilde{v}(x, s) &= \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, s)}{\partial x^2} \tag{4.0.10}
\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung verkörpert bereits die Anfangsbedingung und hat den Vorteil, dass die Variable s lediglich als Parameter vorkommt. Die Lösung der Gleichung (4.0.10) lautet:

$$\tilde{v}(x, s) = a(s) e^{-\sqrt{s}x}$$

(die Lösung mit $e^{+\sqrt{s}x}$ ist nicht physikalisch sinnvoll). Weiterhin gilt:

$$a(s) = \tilde{v}(0, s) = \tilde{g}(s) = (\mathfrak{L}g)(s)$$

Damit ist die Laplace-Transformation $\tilde{v}(x, s)$ bestimmt:

$$\tilde{v}(x, s) = \tilde{g}(s) e^{-\sqrt{s}x} \tag{4.0.11}$$

Da dies ein Produkt ist, gilt für die Umkehrung

$$v = g \cdot \underbrace{\mathfrak{L}^{-1} \left\{ s \rightarrow e^{-x\sqrt{s}} \right\}}_{=:\Theta(x, t)}$$

Bemerkung 4.0.1. Ähnlich wie bei der Fouriertransformation zeigt man für $f, g \in L^1$

$$\mathfrak{L}(f * g) = (\mathfrak{L}f) \cdot (\mathfrak{L}g)$$

(d.h. also

$$\underbrace{\mathfrak{L}(g * \Theta)}_{\tilde{v}} = (\mathfrak{L}g) \cdot \underbrace{(\mathfrak{L}\Theta)}_{e^{-\sqrt{s}x}}$$

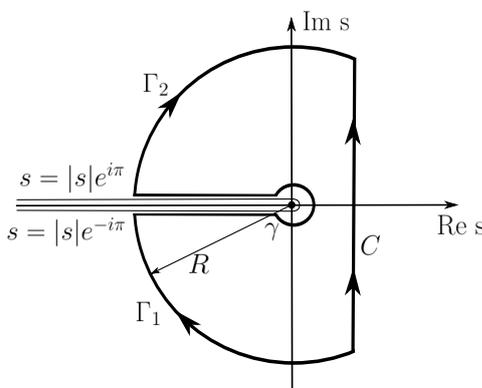
$$\Rightarrow \tilde{v} = \tilde{g} \cdot e^{-\sqrt{s}x}$$

wobei $*$ eine Faltung ist: $f * g = \int f(x)g(x - y)dx$).

Es bleibt nun folgendes zu berechnen:

$$\Theta(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} e^{-\sqrt{s}x} ds, \tag{4.0.12}$$

mit dem Weg C in der folgenden Figur, den wir nun passend deformieren:



Der Integrand aus Gleichung (4.0.12) hat bei $s = 0$ einen Verzweigungspunkt und deshalb legen wir längs der negativen reellen Achse einen Schnitt. Für $t < 0$ in der Gleichung (4.0.12) können wir den Weg C beliebig nach rechts schieben und deshalb verschwindet $\Theta(x, t)$ für negative t ($\int e^{-s|t|} e^{-\sqrt{s}x} ds \rightarrow 0$). Für positive t deformieren wir C nach C' , bestehend aus den beiden grossen Kreisbögen Γ_1, Γ_2 und dem kleinen Kreis γ um den Ursprung (siehe Figur); sowie den Linien oberhalb und unterhalb des Verzweigungsschnittes. Diese verschiedenen Kurvenstücke von C' geben die folgenden Beiträge zum Integral der Gleichung (4.0.12) längs C' .

- Längs Γ_1, Γ_2 ist $s = Re^{i\psi}$, $|\psi| < \pi$ (Die Linie C soll sehr nahe an der y -Achse sein). Es gilt dann

$$|\exp(-s^{1/2}x)| = \exp(-R^{1/2}x \cos \frac{\psi}{2})$$

$$(\rightarrow \exp(-s^{1/2}x) = \exp(-R^{1/2}e^{i\frac{\psi}{2}}x)$$

$$= \exp(-R^{1/2} \cdot (\cos \frac{\psi}{2} + i \sin \frac{\psi}{2}))$$

$$\Rightarrow || = \text{nur Realteil}$$

Da $\operatorname{Re}(s) \leq 0$ entlang Γ_1, Γ_2 (C ist praktisch auf der imaginären Achse), führt

$$e^{st} = e^{(i \operatorname{Im}(st) + \operatorname{Re}(s) \cdot t)}$$

wobei $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ und $t \geq 0$
für $t > 0$

zu einer weiteren Dämpfung und im Limes $R \rightarrow \infty$ verschwinden die Beiträge längs Γ_1 und Γ_2 . Für $|\psi| \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\cos \frac{\psi}{2} > 0$, somit ist $\exp(-R^{1/2} \cdot \cos \frac{\psi}{2})$ für $R \rightarrow \infty \rightarrow 0$ (auch $x > 0$).

- Dasselbe gilt für den kleinen Kreis mit Radius ϵ , für $\epsilon \rightarrow 0$ ($s = \epsilon e^{i\psi} \rightarrow ds = \epsilon i \cdot e^{i\psi} d\psi$, der Integrand ist beschränkt).
- Längs dem oberen "Ufer" des Schnittes ist

$$\begin{aligned} s &= \sigma e^{i\pi} \\ ds &= -d\sigma \\ \rho^{1/2} &= \sigma^{1/2} e^{i\pi/2} = i\sigma^{1/2} \end{aligned}$$

Auf dem unteren "Ufer" gilt $ds = +d\sigma$ ($s = \sigma e^{-i\pi}$)

$$s^{1/2} = \sigma^{1/2} e^{-i\pi/2} = -i\sigma^{1/2} \quad (e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1)$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\leftrightarrow} ds e^{st} e^{-\sqrt{s}x} &= \frac{-1}{2\pi i} \int_R^0 d\sigma e^{-\sigma t} (e^{-i\sigma^{1/2}x} - e^{i\sigma^{1/2}x}) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^R d\sigma e^{-\sigma t} \sin(\sigma^{1/2}x) \end{aligned}$$

Es folgt nun mit $R \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^R d\sigma e^{-\sigma t} \sin(\sigma^{1/2}x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma e^{-\sigma t} \sin(\sqrt{\sigma}x).$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Theta(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma e^{-\sigma t} \sin(\sqrt{\sigma}x) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda^2 t} \sin(\lambda x) \cdot \lambda \\ &\quad (\sigma = \lambda^2 \rightarrow d\sigma = 2\lambda d\lambda; \sigma^{1/2} = \lambda) \end{aligned}$$

Das führt unter Benützung von $\lambda \sin(\lambda x) = -\frac{\partial}{\partial x} \cos(\lambda x)$ zu

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} e^{-\lambda^2 t} d\lambda \right).$$

Da $\cos(\lambda x)$ eine gerade Funktion in λ ist, kann man anstelle von $-\infty$ nach ∞ , zwei mal von 0 nach ∞ integrieren ($\int_{-\infty}^{\infty} \dots \leftrightarrow 2 \int_0^{\infty} \dots$). Der Sinus hingegen ist ungerade.

$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{(\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right] \\ \Rightarrow \Theta(x, t) &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

Somit erhält man für v :

$$v(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau \quad (4.0.13)$$

Dies stellt die (eindeutige) Lösung der Gleichungen (4.0.8) und (4.0.9) dar, wobei für $x, t = 0$ erst integriert und dann der limes $x, t \rightarrow 0$ berechnet werden muss.

Einige Laplacetransformationen

•

$$\begin{aligned} F(t) &= 1 & t > 0 \\ \mathfrak{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} & \text{für } s > 0 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} F(t) &= e^{kt} & t > 0 & \quad (4.0.14) \\ \mathfrak{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \frac{1}{s-k} & \text{für } s > k \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} F(t) &= t^n \\ \mathfrak{L}\{t^n\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}} & s > 0, n > -1 \end{aligned}$$

- \dot{F} ist die Ableitung einer Funktion F nach t

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{\dot{F}\} &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{dF}{dt} dt = \text{partielle Integration.} \\ &= \underbrace{e^{-st} F(t) \Big|_0^\infty}_{-F(0), (=F(\infty)e^{-s\infty} \rightarrow 0)} + s \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \\ &= s \mathfrak{L}\{F(t)\} - F(0)\end{aligned}$$

Im Allgemeinen gilt

$$\mathfrak{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n \mathfrak{L}\{F(t)\} - s^{n-1}F(0) - \dots - F^{(n-1)}(0)$$

Beispiel 4.0.1. *Harmonischer Oszillator*

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \left(\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt}\right).$$

Betrachte die Laplace-Transformierte DGL:

$$\begin{aligned}m \mathfrak{L}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + k \mathfrak{L}(x(t)) &= 0 \\ ms^2 \mathfrak{L}(x) - ms \underbrace{x(0)}_{x_0} - m \underbrace{\dot{x}(0)}_{=0} + k \mathfrak{L}(x) &= 0 \\ \Rightarrow \mathfrak{L}(x) = x_0 \frac{ms}{ms^2 + k} = x_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \omega_0 = \frac{k}{m}\end{aligned}$$

Andererseits gilt $\cos(kt) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$, mit $k \mapsto \pm ik$ können wir (4.0.14) verwenden und erhalten

$$\mathfrak{L}(\cos(kt)) = \frac{s}{s^2 + k^2}.$$

Folglich ist:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t).$$

Beispiel 4.0.2.

$$m\ddot{x} = P\delta(t) \quad P = \text{konst}$$

Laplace-Transformation der δ -Funktion:

$$\mathfrak{L}\delta(t - t_0) = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0} \quad \text{für } t_0 \geq 0,$$

somit ist für $t_0 = 0$ $\mathfrak{L}(\delta(t)) = 1$. Die Laplace-Transformierte DGL ist dann:

$$m s^2 x(s) - m s x(0) - m \dot{x}(0) = P$$

Annahme: $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = 0$; das Teilchen ist in Ruhe bei $t = 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow m s^2 x(s) &= P \\ x(s) &= \frac{P}{m s^2} \end{aligned}$$

mit $\frac{1}{s^2}$ folgt aus $\mathfrak{L}(t^1) = \frac{1!}{s^{1+1}} = \frac{1}{s^2}$. Wir bekommen

$$x(t) = \frac{P}{m} t$$

als Lösung. D.h. genauer $\dot{x}(t)$ für $\epsilon^+ \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}(\epsilon) &= \frac{P}{m}, & \epsilon &\rightarrow 0 \\ &= \frac{P}{m}, & \text{bei } \dot{x}(0) = 0 \text{ und } \dot{x}(-\epsilon) = 0, \end{aligned}$$

da die Lösung $x = \frac{P}{m}|t|$ und $\ddot{x} \sim \delta(t)$ wäre.

Beispiel 4.0.3. Gedämpfter Oszillator

$$m \ddot{X}(t) + b \dot{X}(t) + k X(t) = 0$$

Es sei weiter $X(0) = X_0$, $\dot{X}(0) = 0$. Die Laplace-Transformierte DGL lautet dann:

$$\begin{aligned} m [s^2 x(s) - s x_0] + b [s x(s) - X_0] + k x(s) &= 0 \\ \Rightarrow x(s) &= X_0 \frac{m s + b}{m s^2 + b s + k} \\ \text{oder } x(s) &= X_0 \frac{s + b/m}{s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m}} \\ s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m} &= \left(s + \frac{b}{2m} \right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} \right) \end{aligned}$$

Falls die Dämpfung klein ist, d.h. $b^2 < 4mk$, dann ist der letzte Term positiv und wir

setzen ω_1^2 ein:

$$\begin{aligned}x(s) &= X_0 \frac{s + b/m}{(s + \frac{b}{2m})^2 + \omega_1^2} \\ &= \frac{X_0(s + \frac{b}{2m})}{(s + \frac{b}{2m})^2 + \omega_1^2} + \frac{X_0(\frac{b}{2m\omega_1})\omega_1}{(s + \frac{b}{2m})^2 + \omega_1^2}.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(e^{at} \sin(\omega t)) &= \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2} \\ \mathfrak{L}(e^{at} \cos(\omega t)) &= \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}, \quad s > a.\end{aligned}$$

Somit erhält man:

$$\begin{aligned}X(t) &= X_0 e^{-(\frac{b}{2m})t} \left(\cos(\omega_1 t) + \frac{b}{2m\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) \\ &= X_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-(b/2m)t} \cos(\omega_1 t - \psi),\end{aligned}$$

wobei $\tan \psi = \frac{b}{2m\omega_1}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Für $b \rightarrow 0$ findet man wieder die ungedämpfte Lösung.

5 Tensor Analysis

Tensoren kommen in wichtigen Gebieten der Physik vor, wie zum Beispiel in der allgemeinen Relativitätstheorie und in der Elektrodynamik. Skalare und Vektoren sind Spezialfälle von Tensoren. Ein Skalar ist ein Tensor 0-ter Stufe. Ein Vektor wird als Tensor 1-ter Stufe bezeichnet.

Im dreidimensionalen Raum ist ein Vektor definiert durch die Angabe von drei reellen Zahlen, auch Komponenten genannt. Ein Tensor der n-ten Stufe hat 3^n Komponenten. Als Beispiel betrachte man ein Skalar (Tensor 0-ter Stufe) man hat also $3^0 = 1$ Komponenten. Für ein Vektor gilt $3^1 = 3$ Komponenten. Im Fall von N Dimensionen sind es N^n Komponenten. Die Komponenten des Tensors transformieren unter Koordinatentransformation in einer wohl bestimmten Art und Weise.

Betrachte das Transformationsverhalten des infinitesimalen Vektors $d\vec{r}$ (als Differenz zweier Vektoren) vom Koordinatensystem x_i , mit $(i = 1, 2, 3)$, in das neue System x'_i mit $i = 1, 2, 3$ und

$$dx'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j \quad (5.0.1)$$

(Im Allgemeinen gilt $x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3)$, wobei $i = 1, 2, 3$).

Ein **kontravarianter** Vektor A^i transformiert wie

$$A^i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A^j \quad (5.0.2)$$

Betrachte den Gradienten einer skalaren Funktion $\psi(x, y, z)$ ($x, y, z \Rightarrow x_i, i = 1, \dots, 3$). Im neuen Koordinatensystem x'_i ist $\psi(x', y', z') = \psi' = \psi(x, y, z)$, da ψ ein Skalar ist.

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad (5.0.3)$$

Entsprechend transformiert $\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x'_i}$ mit der Matrix $\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$, welche die Inverse zur Matrix $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ ist. In kartesischen Koordinaten ist $a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = (a_{ij})^T = a_{ji}^{-1}$ aber $a_{ij}^{-1} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$, somit ist $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$. Gleichung (5.0.3) definiert die Transformation eines **kovarianten Vektors**. In kartesischen Koordinaten sind die Transformationsverhalten gleich, dies ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall.

5.1 Tensoren

Der Tensorbegriff ist eine Erweiterung des Vektorbegriffes. Ein n^m -Tupel von Zahlen in einem n -Dimensionalen Raum stellt einen Tensor m -ter Stufe dar, falls sich diese Zahlen nach bestimmten Gesetzen transformieren bei einer Koordinatentransformation. Solche Zahlen heissen Komponenten des Tensors und werden mit m Indizes bezeichnet, die von 1 bis n laufen.

Kontravarianter Tensor zweiter Stufe

Es seien zwei kontravariante Vektoren A^i und \bar{A}^k gegeben. Die n^2 Zahlen $a^{ik} = A^i \bar{A}^k$ heissen Komponenten des Tensorproduktes der gegebenen Vektoren. Diese Komponenten transformieren sich bei Koordinatentransformation, wegen (5.0.2) wie folgt:

$$a^{ik} = \sum_{j,l} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} a^{jl} \quad (5.1.1)$$

Dies gilt allgemein, auch wenn a^{ik} nicht als Tensorprodukt von zwei Vektoren gebildet wird.

Falls $a^{ik} = a^{ki}$, heisst der Tensor **symmetrisch**. Das Tensorprodukt ergibt dann einen symmetrischen Tensor.

Aus der Gleichung (5.1.1) folgt, dass die Multiplikation eines Tensors mit einer Zahl sowie die Addition wieder Tensoren liefern, wobei bei der Multiplikation mit einer Zahl jede Tensorkomponente mit dieser Zahl multipliziert wird. Die Addition ergibt sich durch die Addition von je zwei entsprechenden Tensorkomponenten.

Ein spezielles Tensorprodukt ist das Tensorquadrat des Ortsvektors (x^1, x^2, x^3) . Seine Komponenten sind:

$$\begin{pmatrix} x^1 x^1 & x^1 x^2 & x^1 x^3 \\ x^2 x^1 & x^2 x^2 & x^2 x^3 \\ x^3 x^1 & x^3 x^2 & x^3 x^3 \end{pmatrix}.$$

Betrachte die Trägheitsmomente von Massenpunkten m_i am Ort x_i^1, x_i^2, x_i^3 :

$$\begin{pmatrix} \sum_i m_i x_i^1 x_i^1 & \sum_i m_i x_i^1 x_i^2 & \sum_i m_i x_i^1 x_i^3 \\ \sum_i m_i x_i^2 x_i^1 & \sum_i m_i x_i^2 x_i^2 & \sum_i m_i x_i^2 x_i^3 \\ \sum_i m_i x_i^3 x_i^1 & \sum_i m_i x_i^3 x_i^2 & \sum_i m_i x_i^3 x_i^3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein kontravarianter, symmetrischer Tensor. Analog ergibt sich ein **kovarianter Tensor** zweiter Stufe. Dieser transformiert nach:

$$c'_{ij} = \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} c_{kl} \quad (5.1.2)$$

(Es gilt: Indizes unten \rightarrow kovariant; Indizes oben \rightarrow kontravariant)

Gemischte Tensoren

Ein Beispiel ist das Produkt einer Tensormultiplikation eines kontravarianten und eines kovarianten Vektors. Man erhält aus dieser Multiplikation einen **gemischten Tensor**, welcher wie folgt transformiert:

$$b_j^i = \sum_{k,l} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} b_l^k \quad (5.1.3)$$

Es gilt die Summationsregel: Man summiert über gleichen Indizes oben und unten.

Bemerkung 5.1.1. *ein Tensorprodukt eines kontravarianten und eines kovarianten Vektors ist ein symmetrischer, gemischter Tensor zweiter Stufe oder eine Matrix. Gleichung (5.1.3) widerspiegelt, wie sich eine Matrix unter Koordinatentransformation verändert.*

Bemerkung 5.1.2. *Reine kontravariante oder kovariante Tensoren zweiter Stufe sind keine Matrizen.*

Tensoren höheren Stufe

Ganz analog bekommt man für Tensoren höheren Stufe, dass diese sich wie folgt transformieren:

$$a_{klm}^{nj} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_f} \frac{\partial x'_j}{\partial x_g} \frac{\partial x_n}{\partial x'_k} \frac{\partial x_t}{\partial x'_l} \frac{\partial x_v}{\partial x'_m} a_{ntv}^{fg} \quad (5.1.4)$$

(Tensoren nullter Stufe sind Skalare)

Verjüngung

Definition 5.1.1. *Man **verjüngt** einen Tensor, indem man einen oberen und einen unteren Index gleichsetzt. Dies führt zu einer Summation über diesen Index.*

Ein Beispiel einer Verjüngung ist das Skalarprodukt zweier Vektoren $A^i \cdot B_i = \vec{A} \vec{B}$. Das Resultat ist dann ein Skalar.

Satz 5.1.1. *Durch die Verjüngung eines Tensors erhält man einen Tensor, dessen Stufe um eine ganze Zahl kleiner ist.*

Beispiel 5.1.1. *Die Spur einer Matrix:*

$$b_i^i = \sum_{i,k,l} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_i} b_l^k$$

Hier wurde über i summiert. $\frac{\partial x'_i}{\partial x_k}$ ist die inverse Matrix zu $\frac{\partial x_k}{\partial x'_i}$. Somit ist

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_l}{\partial x'_i} &= \delta_{kl} \\ \Rightarrow \sum_{k,l} \delta_{kl} b_k^l &= \sum_l b_l^l = b_l^l, \end{aligned}$$

das heisst also, dass die Spur ein Skalar und somit invariant ist.

Bemerkung 5.1.3. Sind die Komponenten a_{ik} eines Tensor (auch höhere Stufe) als Funktion des Ortes \vec{x} gegeben, so spricht man von einem **Tensorfeld**.

A Literatur zur Vorlesung MMP II

- G.B. Arfken and H.J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, Inc. 1995
- E. Stiefel, Methoden der Mathematisch Physik I und II, Verlag der Fachvereine an der ETHZ 1973
- H. Cartan, Elementare Theorien der Analytischen Funktionen einer oder mehreren Komplexen Veränderlichen, BI Hochschultaschenbücher Band 112, 1966
- S. Lang, Complex Analysis, Springer Verlag 1993
- L. V. Ahlfors, Complex Analysis 2nd ed. 1966
- J. F. Cornwell, Group Theory in Physics, Academic Press 1984
- H. Weyl, The Classical Groups, their Invariants and Representations, Princeton University Press, 1961
- G. Felder, Mathematische Methoden der Physik II, Vorlesungsskript 2018
<https://people.math.ethz.ch/~felder/mmp/mmp2/>